

メゾ系における輸送現象の基礎に関する 研究

Study on Fundamental Aspects
of Transport in Mesoscopic Systems

2010年2月

早稲田大学大学院 理工学研究科

物理学及応用物理学専攻 統計物理学研究

鯨坂 繁

序文

巨視的な輸送現象をミクロな立場から説明することは物理学の中心課題のひとつである。特に、微細加工技術の発展により、メゾ系の輸送現象の研究は基礎・応用の両面から重要性を増している。応用面では、電気伝導などの重要性から流れのある非平衡状態の理解が不可欠であり、特に、メゾ系は環境系から切り離して考えることが難しいため、環境まで含めた大域的性質を把握することが重要になる。さらに、一定の仮定の下で非平衡状態を扱う複数の処方箋が提案されているにも関わらず、コンセンサスが得られていないことから、個別系に関する考察を積み重ねることで基礎論の発展にも寄与すると考えられる。

そこで、本論文では、メゾ系における輸送現象の基礎に関する問題を古典系および量子系から一つずつ選び、詳細に検討する。量子系の例としては、相転移を示す1次元電子・格子系をとりあげ、非平衡相転移と輸送過程を調べる。古典系では相空間軌道の性質が輸送現象を大きく左右し、特に、近可積分系ではhomoclinic(heteroclinic) tangleが相空間内の輸送過程を律していることが知られている。そこで、古典系の例として、パラメータに依存し軌道構造が幾何学的に変化する2次元写像を取り上げ、そのhomoclinic (heteroclinic) tangleのパラメータ変化を詳細に調べる(用語の定義などについては4章を参照)。

第I部では、2つの自由電子浴にはさまれた1次元電子・格子系(Takayama Lin-Liu Maki (TLM)モデル)における非平衡相転移について調べる。相転移は電気伝導、磁性などの物性を大きく変えるため、基礎・応用の両面から重要であるが、非平衡系の相転移、特に、相転移における流れや化学ポテンシャルの役割は十分には解明されていない。このように、大きな熱浴と相互作用する小さな系 - 量子開放系 - を扱う手法には、KeldyshのGreen関数法、Lindblad方程式の方法、近年、数理論理分野で進展しているC*代数の方法などがある。KeldyshのGreen関数法は、種々の物理量を計算するのに便利で広く用いられているが、背景にある統計集団そのものは興味対称に入っておらず環境系まで含めた大域的性質は調べることができないし、定常状態の存在や摂動級数の収束性があらかじめ仮定されている。Lindblad方程式の方法では、着目する系の時間変化が完全正值なマルコフ過程になることを仮定しているが、環境系の影響は一般には非マルコフ的になるため適用可能な場合が限られている。C*代数の方法では、時間発展についてやや強い仮定の下で、動力学から自然に導かれる非平衡定常状態(自然な非平衡定常状態)を大域的に特徴づけることができる。本論文では、開放的TLMモデルについて、平均場近似とC*代数の方法を用いて、非平衡相転移と輸送現象を調べる。その結果、化学ポテンシャル差よりも電流が相転移を特徴付ける自然な制御変数であること、一様な電荷密度相が電流により抑制されること、負の微分伝導度が可能であることを明らかにする。さらに、ソリトン対の結合状態であるポーラロンが電流によって誘起され得ることを見出した。これは空間的に一様な流れが局所的な構造を誘起した例であり、ミクロ系における散逸構造の例と考えることができる。

第 II 部では、パラメータに依存し軌道構造が変化する 2 次元写像、Harper 写像を取り上げ、homoclinic (heteroclinic) tangle のパラメータ変化を調べる。古典系では、相空間全体が双曲的な場合や、可積分な場合の理解は進んでいるものの、カオス軌道と準周期軌道が混在する系の理解は十分ではない。このようなカオス軌道と準周期軌道の共存は、Hamilton 系で広く現れるため、その理解は Hamilton 系における輸送現象を解明する上で不可欠である。さらに、このような場合エルゴード仮説が満たされないため、その理論は統計力学の基礎的問題としても重要である。特に近可積分系では homoclinic (heteroclinic) tangle が相空間内の輸送過程を律していることが知られている。homoclinic 軌道付近における輸送は、1980 年代に Channon-Lebowitz、Bartlett、Mackey-Meiss-Percival によって明確な議論がはじまった。homoclinic 点を 1 つ定めるとこの homoclinic 点と固定点を結ぶ不安定多様体、安定多様体から擬セパラトリックスを考えることができる。この擬セパラトリックスの内から外（外から内）への輸送は、擬セパラトリックスを決定する homoclinic 点近傍の安定多様体、不安定多様体によって作られる turnstile 型の領域の運動のみから決定される。この turnstile 型の領域は、可積分系に摂動を加えた際にセパラトリックス分裂によって生じる homoclinic (heteroclinic) tangle の一部であり、homoclinic (heteroclinic) tangle は、可積分系におけるカオス発生のメカニズムを調べる目的で詳しく研究されてきた。このようなメカニズムによる位相空間のカオス化は定性的には Poincaré 以来知られていたものの、彼自身が複雑すぎて描くことはできないと評していたように、定量的な扱いは近年まで困難であった。1980 年代に入り Lazutkin、Gelfreich らは時間を複素数に拡張し、複素面の特異点周りで漸近解析を行い、homoclinic (heteroclinic) tangle を特徴づける摂動パラメータに対して指数的に小さな量 (homoclinic (heteroclinic) tangle、および、Lazutkin によって提案された homoclinic invariant) の漸近展開を導出することに成功した。これは、homoclinic (heteroclinic) tangle を解析的に調べる上で強力な道具であることが、先行研究により明らかにされている。さて、力学系においてパラメータ変化による軌道のトポロジーの変化は、物質における相転移に相当し、力学系の大域的性質を理解する上で重要になる。セパラトリックスどうしの変化に話を限ると、このような現象はリコネクションと呼ばれ近可積分系ではセパラトリックスから生じる複数の不安定多様体が接触することにより大域的なカオスが生じることが知られている。従って、homoclinic (heteroclinic) tangle はパラメータ変化によって構造を大きく変えることが期待されるが、これまで十分には調べられていない。ところで、Harper 写像では、可積分極限でパラメータ変化によりセパラトリックスがリコネクション転移を起こすことが知られている。そこで、本論文では、近可積分 Harper 写像について、上述の Borel 解析を利用して、リコネクション転移に伴う homoclinic (heteroclinic) tangle の変化を詳細に調べる。この結果、パラメータがリコネクション転移値に近づくにつれ、安定・不安定多様体の交差領域が滑らかに拡大してトポロジカルな性質が変わることを明らかにする。

目次

第 I 部	量子系における非平衡相転移	7
第 1 章	研究の背景と目的	9
1.1	Keldysh 法	9
1.2	Lindblad 方程式	10
1.3	C*代数の方法	12
第 2 章	Takayama Lin-Liu Maki モデルの非平衡相転移	15
2.1	序	15
2.2	開放的 TLM モデル	16
2.3	NESS の構成 - 開放的多準位モデル -	18
2.4	平均場近似 TLM モデルの NESS と自己無撞着方程式	20
2.5	Green 関数と補助関数	22
2.5.1	Green 関数	22
2.5.2	微分方程式 (2.18) が空間並進対称の場合	23
2.5.3	微分方程式 (2.18) のうち 1 成分のみが空間並進対称の場合	24
2.6	自己無撞着方程式	25
2.6.1	空間一様解	26
2.6.2	ソリトン解	28
2.6.3	ポーラロン解	32
2.7	電流	37
2.8	相の安定性	38
2.9	非平衡 Peierls 転移	39
2.9.1	自己無撞着方程式の解析	39
2.9.2	絶対零度における非平衡 Peierls 転移	40
2.9.3	有限温度における非平衡 Peierls 転移 (電圧駆動)	43
2.9.4	有限温度における非平衡 Peierls 転移 (電流駆動)	51
2.9.5	有限温度における非平衡 Peierls 転移の定性的理論	53
2.9.6	非平衡ソリトン	55
2.9.7	非平衡ポーラロン	56
第 3 章	まとめと考察	61
3.1	まとめ	61
3.2	先行研究との相違点	62
3.3	Terasaki らの実験との比較	63

3.4	ポーラロンの観測可能性	64
3.5	今後の展望	64
第 II 部 古典系における輸送と相転移		67
第 4 章 研究の背景と目的		69
4.1	力学系の問題における本研究の位置づけ	69
4.2	2 次元写像系と Harper 写像	73
第 5 章 近可積分 Harper 写像のセパラトリックス分裂とリコネクション転移		77
5.1	概要	77
5.2	Melnikov の摂動法	82
5.3	内部方程式の導出	84
5.4	内部方程式の解の性質	87
5.4.1	Borel 和と解析接続	87
5.4.2	$\tilde{V}_0(p)$, $\tilde{U}_0(p)$ の決定	89
5.4.3	内部方程式の高次解	93
5.4.4	付与項の漸近級数	95
5.5	内部解と外部解のマッチング	95
5.5.1	$t = t_1$ における内部解と外部解のマッチング	95
5.5.2	$t = t_1^*$ からの寄与	97
5.5.3	他の特異点からの寄与	97
5.6	初期条件の選択についての考察	98
5.7	数値計算との比較と、不安定多様体のリコネクション	100
5.7.1	数値計算との比較	100
5.7.2	リコネクション転移	103
第 6 章 まとめと展望		105
第 III 部 結論		109
付 録 A 連続モデルの導出		113
付 録 B Coulomb エネルギーと化学ポテンシャル		115
付 録 C Green 関数の導出		117
C.1	一様解	117
C.2	ソリトン解	117
C.3	ポーラロン解	118
付 録 D 固定点の安定性		121

付 録 E Sommerfeld 展開の漸近評価	123
E.1 Sommerfeld 展開	123
E.2 漸近展開の評価	125
E.3 漸近展開の評価で用いる不等式	127
付 録 F $k > 1$ の場合の解の構成	129
付 録 G 線形化方程式の Borel 変換の解析	131
付 録 H 1 次の内部方程式の Borel 変換の解析	133
付 録 I 複素共役特異点の解析	135

第I部

量子系における非平衡相転移

第1章 研究の背景と目的

メゾ系の物理における最終目標の1つは熱浴とカップルする系の輸送現象を含む非平衡現象を完全に理解することである。メゾ系は、環境との相互作用が無視できない量子開放系の典型例となっており、全体系を孤立系とみて、量子論を適用する必要がある。すなわち、全体系を記述する密度行列を ρ_{TOT} とし、系、熱浴、相互作用を記述するハミルトニアンを、それぞれ H_S 、 H_R 、 V とするとき、運動方程式

$$\frac{d}{dt}\rho_{TOT}(t) = -i[H_S, \rho_{TOT}(t)] - i[V, \rho_{TOT}(t)] - i[H_R, \rho_{TOT}(t)] , \quad (1.1)$$

のふるまいを調べなければならない。量子開放系の研究は、メゾ系の現象を定量的に解明する上で重要なだけでなく、統計力学基礎論の立場からも重要である。なぜなら、熱力学の基本法則の1つである不可逆性は、ユニタリーな時間発展で記述される孤立系の量子力学と矛盾するが、(1.1) 式の両辺から、熱浴の自由度をトレースアウトした系の密度行列 $\rho_S \equiv \text{Tr}_R[\rho_{TOT}]$ の方程式

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_S, \rho_S(t)] - i\text{Tr}_R\{[V, \rho_{TOT}(t)]\}$$

は非ユニタリーとなり得るため、この矛盾を解決する方策を与え得ると考えられるからである。最も単純な量子開放系は、系が異なる化学ポテンシャルもしくは、温度を持つ複数の熱浴と相互作用する系であろう。この場合、全系は定常な粒子流・エネルギー流を持つ非平衡定常状態 (NESS) に向かうことが期待される。本章では、開放系の研究によく用いられる代表的な手法、Keldysh の Green 関数法と Lindblad 方程式の方法について概説し、問題点を明らかにした上で、本論文で用いる C^* 代数法について概説する。

1.1 Keldysh 法

Keldysh 法は熱浴、系、及びその相互作用からなる全体系の振舞いに着目し、初期時刻 $t = -\infty$ から出発し、 $t = \infty$ を経て、再び $t = -\infty$ に戻る時間経路に沿う時間発展を調べる。まず、全系の Hamiltonian を熱浴・系を表す項のうち生成・消滅演算子について対角化されている部分 H_0 と、Coulomb 相互作用などの相互作用、系と熱浴のカップリングを表す項 $H_1(t)$ に分ける。

$$H(t) = H_0 + H_1(t)$$

$\lim_{t \rightarrow -\infty} H_1(t) = 0$ および、摂動項 H_1 が入る前に系、熱浴が各々 H_0 の各成分に関する平衡状態にあること仮定する。以下、計算法のあらましを見ていこう。 H_0 に関する相互作用

表示をとり、相互作用表示における相互作用を \hat{H}_1 とする。この時、

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, s) = \hat{H}_1(t) U(t, s), \quad U(s, s) = 1$$

の解を用いると、時刻 t での全系の密度行列は $\rho(t) = U(t, s)\rho(s)U(s, t)$ となるので時刻 t におけるオブザーバブル $A(t)$ の平均値は

$$\begin{aligned} \langle A(t) \rangle &= \text{Tr}[U(t, -\infty)\rho(-\infty)U(-\infty, t)A(t)] \\ &= \text{Tr}[\rho(-\infty)U(-\infty, t)A(t)U(t, -\infty)] \\ &= \text{Tr}[\rho(-\infty)U(-\infty, \infty)T\{U(\infty, -\infty)A(t)\}] \\ &= \langle U(-\infty, \infty)T\{U(\infty, -\infty)A(t)\} \rangle_{in} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{i^n (-i)^m}{n!m!} \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \cdots ds_n dt_1 \cdots dt_m \\ &\quad \langle \{\tilde{T}\hat{H}_1(s_1) \cdots \hat{H}_1(s_n)\} \{T\hat{H}_1(t_1) \cdots \hat{H}_1(t_m)A(t)\} \rangle_{in} \end{aligned}$$

と計算される。ここで、 $\langle \cdots \rangle_{in}$ は初期状態についての平均で、 T は時間順序積、 \tilde{T} は時間反順序積である。ここで、 $t = -\infty$ から $t = \infty$ へ向かう経路 C_1 と、 $t = \infty$ から再度 $t = -\infty$ に折り返す経路 C_2 を合わせた経路 C と、 C にそった順序積 T_C を導入する。すると、 C に沿い $-\infty$ から $-\infty$ に到る時間発展演算子 U_C を用い期待値 $\langle A(t) \rangle$ は、

$$A(t) = \langle T_C U_C A(t^-) \rangle_{in}$$

と表せる。上式で、 t^- は t が C_1 に入っていることを表す。非摂動 Hamiltonian は双線形なので、初期状態に関する平均は Wick の定理を満たし、摂動展開の各項は経路の順に並び変えられた2つの演算子の相関関数の積に分解され、Feynmann ダイアグラムの方法が適用できる。通常は、順序積 T_C を用いて定義した Green 関数 $G(1, 2) \equiv -i \langle T_C [\Psi^\dagger(1) \Psi(2)] \rangle$ のかわりにその4成分 $G_c(1, 2)$ ($1, 2 \in C_1$), $G^>(1, 2)$ ($1 \in C_2, 2 \in C_1$), $G^<(1, 2)$ ($1 \in C_1, 2 \in C_2$), $G_{\bar{c}}(1, 2 \in C_2)$ に関するダイアグラムや Dyson 方程式を用いて、非平衡における平均値を計算する。Keldysh の Green 関数法の最大の利点は、Feynmann ダイアグラムや Dyson 方程式のような場の量子論で確立された方法を利用して諸量を計算できる点である。しかし、他の摂動論にもみられるように、摂動級数の収束を吟味することは一般に困難である。さらに、 $t = -\infty$ から出発し、 $t = -\infty$ に戻る時間経路に沿って時間発展した量を初期時刻の局所平衡状態で平均して求めるため、NESS の存在証明や特徴付けは考慮されていない。従って、この方法で大域的振舞い捉えることはできない。

1.2 Lindblad 方程式

Lindblad 方程式の方法では環境の影響を受けて時間発展する系のみに注目し、時間発展に半群の性質（マルコフ性の十分条件）と”完全正值性”を課すことで得られる方程式（Lindblad 方程式）を用いて、系の非平衡状態、緩和過程などを論じる。

Lindblad 方程式の導出についてみていこう。 $\text{Tr} \rho = 1$, $\rho > 0$ （全ての固有値が正の意味）である状態空間を T_{1+} とし、 T_{1+} 上の時間発展演算子 Λ_t が線形かつ半群の性質（マルコフ

性の十分条件) を満たし、かつ、トレースノルム $\|\cdot\|_T$ に対して連続とする。すなわち、 Λ_t は $t \geq 0$ で定義される T_{1+} から T_{1+} への写像のうち以下の性質をみたすものである [1, 2, 3]。

- (1) $\forall \rho_1, \rho_2 \in T_{1+}, \forall a, b \in \mathbb{C}, \Lambda_t(a\rho_1 + b\rho_2) = a\Lambda_t\rho_1 + b\Lambda_t\rho_2$
- (2) $\Lambda_t\Lambda_s = \Lambda_{t+s}$
- (3) $\lim_{t \rightarrow 0+} \|\Lambda_t\rho - \rho\|_T = 0$

をみたすものとする。すると、 Λ_1 は $\|\cdot\|_T$ について縮小写像であり、Hille-Yosida の定理 [4] より、

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t) \quad (1.2)$$

をみたす T_{1+} から T_{1+} への写像 \mathcal{L} が存在する。特に、 N 準位系では \mathcal{L} は以下の形であらわされることが証明されている [1, 2, 3]。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{H} + \mathcal{D} \\ \mathcal{H} &= -i[\mathcal{H}, \rho], \quad \mathcal{D}\rho = \frac{1}{2}C_{ij} \left([F_i, \rho F_j^\dagger] + [F_i\rho, F_j^\dagger] \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

但し、 \mathcal{H} は $\text{Tr}\mathcal{H} = 0$ を満たす自己共役作用素、 $F_i, (i = 1, 2, \dots, N^2 - 1)$ は、 $\text{Tr}F_i = 0, \text{Tr}F_i^\dagger F_j = \epsilon\delta_{i,j} (\epsilon > 0)$ を満たす作用素であり、行列 $[C_{ij}]$ はエルミート行列である。また、くり返し添字は、その添字に関する和をとることを示している ((1.3) の形を持つことは (1)–(3) の必要条件であり、十分ではない [5, 6])。 \mathcal{H} はユニタリーな時間発展を与える部分で、非ユニタリー性を表す \mathcal{D} は散逸とも呼ばれ、von Neumann 方程式では $\mathcal{D} = 0$ となっている。さらに、 Λ_t が完全正值性をもつと行列 $[C_{ij}]$ が正值であることが分かる [7, 8]。逆に、生成子 \mathcal{L} が (1.3) 式で表され $[C_{ij}]$ が正值行列となるとき、 \mathcal{L} から生成される時間発展は (1)–(3) を満たし、かつ完全正值性を満たす [7, 8]。

なお、系と熱浴が初期時刻で相関がない場合、熱浴の自由度をトレースアウトした密度行列 ρ_S の時間発展写像 Λ_t は完全正值性をもつ [9, 10]。 (1.3) の生成子をもつ方程式 (1.2) は、Lindblad 方程式と呼ばれ、明らかに非ユニタリーな時間発展を表している。

Lindblad 方程式を解析的に解くことは一般には難しいが、特に、Lindblad 生成子 \mathcal{L} が以下の形を持つ時には完全に対角化することが可能である [11]。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho &= \mathcal{L}\rho = -i[\mathcal{H}, \rho] + \sum_{\mu} ([L_{\mu}, \rho L_{\mu}^\dagger] + [L_{\mu}\rho, L_{\mu}^\dagger]) \\ \mathcal{H} &= \sum_{j,k=1}^{2n} w_j H_{jk} w_k, \quad H_{jk} = -H_{kj} \\ L_{\mu} &= \sum_{j=1}^{2n} l_{\mu,j} w_j \\ \{w_j, w_k\} &= 2\delta_{j,k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, 2n \end{aligned}$$

このとき、定常状態の存在が証明されており、任意のオブザーバブルの定常状態での期待値が計算可能で、さらに、定常状態への緩和モードも完全にわかっている。なお、Lindblad

方程式を用いて、XY モデルの新しい量子相転移 [12]、XXZ モデル [13, 14]、 $t-V$ モデル [15] における負の微分伝導度などが報告されている。これについては、§ 3.2 で本論文の結果との比較を行う。

Lindblad 方程式は完全正值性、半群の性質（マルコフ性の十分条件）に基づいて導出されるため、非マルコフ性が効いてくる現象を扱うことはできない。

1.3 C*代数の方法

序論でも述べたように、メゾ系は自由度が小さいことから環境を含めた大域的な性質を考慮しなければならない。この観点と自然な NESS の構成という観点から C*代数と他の方法の違いについてまず述べる。最も利用されている非平衡系へのアプローチは Lindblad 方程式、Keldysh 法であろう。まずは、Lindblad 方程式であるが、最初から環境の自由度を消去しているため、NESS を環境まで含めて大域的に特徴付けることは不可能である。さらに、Lindblad 方程式の方法では、着目する系の時間変化が完全正值なマルコフ過程になることを仮定しているが、環境系の影響は一般には非マルコフ的になるため適用可能な場合が限られている。また、Keydsh 法は種々の物理量の計算には適するが、NESS の存在や摂動級数の有効性があらかじめ仮定されている。さらに、相互作用を adiabatic に入れる必要があり、これが本当に実現可能かは検討すべき問題である。他の非平衡系へのアプローチとして、Sasa、Tasaki の SST [16] や Zubarev による束縛条件下でエントロピーを最大にすることを原理とした方法 [17] があるが、仮定が物理的に自然とは言えず、例えば、定常 Boltzmann 方程式の数値解析との矛盾なども指摘されている [18]。

以上の研究に対し C*代数を用いたアプローチでは、相互作用の入れ方に仮定を置いたり、平衡状態からの外挿するといったことをせず、時間発展についてやや強い仮定の下で動力学から自然に導かれる非平衡定常状態（自然な非平衡定常状態）を大域的に特徴づけることができる（本節の (1.4) 参照）ため、本論文では C*代数の方法を用いる。

C*代数の方法は、量子力学を公理化する目的で導入され [19]、平衡状態の研究に適用されてきたが [20, 21, 22]、近年、平衡から離れた非平衡状態の解析にも有効であることが認識され、様々な研究がなされている [23, 24]。1980 年代までには、例えば、Pusz と Woronowicz により Carnot の定理が [25]、Ojima らにより相対エントロピー生成の正值性が証明されている [26, 27, 28]。近年の急速な発展の契機となったのは、Ruelle による散乱理論を用いた NESS の特徴付け [21, 22] と、Jakšić と Pillet のエントロピー生成の正值性の証明 [29, 30, 31] である。その後、C*代数を用いた NESS の研究は急速に発展しており [例えば、文献 [24, 32, 33, 34, 35, 36] 及びその文献]、Ho と Araki、Aschbacher らによる XY モデルにおける NESS の厳密な構成と NESS 特有の長距離相関の導出 [37, 38]、Aharonov-Bohm リングにおける電流存在下での Fano-Kondo 効果 [39]、Kondo 効果の可解モデルにおける非線形伝導 [40]、Landauer-Büttiker 公式の厳密証明 [41, 42, 43, 44, 45, 46, 47] などの研究に応用されてきた。

C*代数 \mathcal{A} は、有限な“大きさ”（ノルム）をもつ一般には無限に広がった系の物理量全体から成り、次の性質を満たす代数である。

- $A, B \in \mathcal{A}$ ならば、 $\alpha A + \beta B \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

- $A, B \in \mathcal{A}$ ならば、 $AB \in \mathcal{A}$
- 反線形の*演算が定められ、 $(A^*)^* = A$, $\|A^*\| = \|A\|$
- $\|A^*A\| = \|A\|^2$

\mathcal{A} 上の時間発展は \mathcal{A} から \mathcal{A} への線形写像 τ_t で積を保存するものとして定義される。C*代数では、状態 ω は、期待値を表す \mathcal{A} 上の正值汎関数 ($\omega(A) \geq 0$, $\omega(\alpha A + \beta B) = \alpha\omega(A) + \beta\omega(B)$) として導入される。ノルムの有限性と ω の正值性から $|\omega(A)| \leq \|A\| < \infty$ となるので、この方法では有限の量を扱いつつ、無限系の振舞いを調べることが可能になり、例えば、明らかに ill-defined な、全系の Hamiltonian など扱う必要がなくなる。これは、通常の量子力学において状態に関する Hilbert 空間を導入し、その上の線形演算子として観測量を導入するのは逆の流れをたどっていることを注意しておく。C*代数の方法では、マルコフ性や断熱的スイッチオンなどを仮定することなく、適当な条件の下で、純粋に力学的に NESS の存在を証明することができる。しかし、これまでの研究は、数理物理的立場からのものが多く、数学的な厳密性が重視され物性の問題に広く使われることはなかった。本論文では、この方法を用いて非平衡 Peierls 転移を調べ、実用上も有用な方法であることを明らかにしていきたい。本論文では、2つの熱浴 $\nu = L, R$ にカップルした量子系を考える。熱浴が、自由電子系である時、波数 k の熱浴電子の消滅演算子 $a_{k\nu}$ の incoming field $\alpha_{k\nu}$ が完全系をなす場合、2つの熱浴が異なる平衡状態にある初期状態は、時刻が無限大の極限で NESS に近づくことが示せる [34, 39]。この NESS は incoming field $\alpha_{k\nu}$ について Wick の定理および、次式を満たす唯一の状態である [21, 22, 24, 29, 30, 31]。

$$\langle \alpha_{k\nu}^\dagger \alpha_{k'\nu'} \rangle_\infty = f_\nu(\omega_{k\nu}) \delta_{\nu\nu'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.4)$$

ここで $\langle \cdots \rangle_\infty$ は NESS 平均を表し、 $\omega_{k\nu}$ は波数 k の1粒子エネルギー、 T_ν は初期時刻の熱浴の温度、 μ_ν は初期時刻の熱浴の化学ポテンシャルであり、 $f_\nu(x) \equiv 1/(e^{(x-\mu_\nu)/T_\nu} + 1)$ はフェルミ分布である。(1.4) の厳密な導出は注意深い取り扱いが必要であるが [34]、形式的には以下のように簡単に示すことができる。 ρ_0 を初期時刻の密度行列とし、初期時刻では系、熱浴は相関がなく、熱浴は各々異なる平衡状態にあるとする。この時 NESS の密度行列 ρ_∞ は $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-iHt} \rho_0 e^{iHt} = \rho_\infty$ で与えられる。初期時刻では、例えば、 $\text{Tr}\{a_{k\nu}^\dagger a_{k'\nu} \rho_0\} = f_\nu(\omega_{k\nu}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ が満たされる。incoming field $\alpha_{k\nu}$ は $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{i\omega_{k\nu}(-t)} e^{iH(-t)} a_{k\nu} e^{-iH(-t)} = \alpha_{k\nu}$ で定義されるので、

$$\begin{aligned} f_\nu(\omega_{k\nu}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') &= \text{Tr}\{a_{k\nu}^\dagger a_{k'\nu} \rho_0\} e^{i(\omega_{k\nu} - \omega_{k'\nu})t} \\ &= \text{Tr}\left\{ \left\{ e^{iH(-t)} a_{k\nu} e^{-iH(-t)} e^{i\omega_{k\nu}(-t)} \right\}^\dagger \left\{ e^{iH(-t)} a_{k'\nu} e^{-iH(-t)} e^{i\omega_{k'\nu}(-t)} \right\} e^{-iHt} \rho_0 e^{iHt} \right\} \\ &\rightarrow \text{Tr}\{ \alpha_{k\nu}^\dagger \alpha_{k'\nu} \rho_\infty \} \equiv \langle \alpha_{k\nu}^\dagger \alpha_{k'\nu} \rangle_\infty \quad (\text{as } t \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

となり、(1.4) が得られる。(1.4) は、Blanter と Büttiker が注意しているように ([47] の Eq.(29)、(36)) Landauer-Büttiker によるメゾスコピック回路における輸送論の出発点となり得る。

第I部では、(1.4) を用いて Takayama Lin-Liu Maki (TLM) モデルの非平衡相転移を調べる。

第2章 Takayama Lin-Liu Makiモデル の非平衡相転移

2.1 序

30 年ほど前にハロゲンをドーピングすることにより、伝導性ポリマーで金属・非金属転移がおきることが Shirakawa ら [48] によって発見されて以来、伝導性ポリマーの電気伝導など物性の研究が急速に進んだ。Su、Schrieffer、Heeger [49, 50] は、ポリアセチレンを記述するモデルとして SSH モデルを導入した。SSH モデルは電子のホッピング項が格子変位に線形に依存する 1 次元格子モデルで、格子の自発的な歪みを自然に説明する。SSH モデルでは、一様な自発格子歪み状態の他、異なる一様歪み状態をつなぐソリトン励起、2 つのソリトン励起の束縛状態とみなせるポーラロン励起の存在が見出されている [51, 52]。Takayama、Lin-Liu、Maki [53] は、電子のフィリングが $1/2$ の時に、分散関係を線形化し、連続極限をとることで、空間的に一様な歪み状態、静的なソリトン励起を持つ連続体モデル (TLM モデル) が得られることを示した。さらに、Brazovskii-Kirova[54] と Campbell-Bishop [55] は、TLM モデルと場の理論における Gross-Neveu モデルとの同等性 [56, 57, 58] を用いて、スピンがある場合に格子変位の自己無撞着方程式がポーラロン解をもつことを示した。なお、 N 成分 Gross-Neveu モデルが、 $N > 1$ に限りポーラロン解を持つことから、スピンレスの場合にポーラロンが存在しないことも指摘した。ポリアセチレンに代表される伝導性ポリマーの性質は、理論的にも、実験的にも詳細に調べられ [52]、ソリトン、ポーラロンといった局在したトポロジカルな欠陥が電流のキャリアとして重要であることが指摘されている¹。近年では、電場に対するトポロジカル欠陥の安定性、伝播速度の電場依存性 [60, 61, 62]、電場・クーロン相互作用依存性 [63] などが調べられ、例えば、高電場で、ポーロンの速度が超音速に転移することや、ポーロンが崩壊することなどが見出されている [64, 65, 61, 66]。従来のアプローチでは、ソリトンやポーロンのようなトポロジカルな欠陥の外場や外界からの摂動に対する応答は、基底状態/平衡状態を基準として論じられる。これに対し、本論文では外界の存在により引き起こされる非平衡性によって基準となる状態がどのように変化し、そこに生じるトポロジカルな欠陥 - ソリトン [67]、ポーラロン [68] - がどのような性質を持つかを詳しく論じる。

本章では 2 つの外界とトンネル接合を介して相互作用する有限長の TLM モデル (開放的 TLM モデル) について、格子変位に関する平均場近似の下で非平衡定常状態を構成し、格子変位が一様な状態において、バンドギャップ (= 自発格子変位) と電位差、電流の関係、非平衡下の相図を調べる。また、非平衡下におけるソリトン解、ポーラロン解の性質についても調べる。

¹ 2009 年には、ソリトンが電流に寄与しないという主張もされており [59]、この問題は未だ議論中である。

主要な結果は次の通りである：一様相でバンドギャップは電圧の関数としては極めて複雑な振る舞いを示すが、電流の単調減少関数であり、閾値を超える電流を流すと、この相は消失する。これは、電流が非平衡の効果による秩序の破壊を記述する自然なパラメータであることを示唆している。第2に、電圧に対してバンドギャップが複雑な振る舞いをするため、負の微分伝導度が生じる。負の微分伝導度の存在は XXZ モデル [14]、extended Hubbard モデル [13, 15] においても報告されており、§ 3.2 で、これらの研究と本論文の結果との関係を論じる。第3に、平衡系で見られるものと空間変数について同一の関数形を持つトポロジカルな欠陥が可能である。特に、一様解の各相でソリトン解が、一定の条件下でポーラロン解が存在する。特に、ポーラロンについては、平衡系でポーラロンが存在しないスピンレスの場合でも、閾値以上の電流が流れるとポーラロン解が生じる。一様相の場合は、電流が秩序を抑制していたことを思い出すと、この結果は電流がポーラロン形成を促すという”建設的な (constructive) 役割”を演じているという点でユニークである。これは、一種の散逸構造とも考えられる。ポーラロン励起が可能となる電圧領域の幅は、温度の単調減少関数であり、電流領域の幅は、温度の単調増加関数である。これと、絶対零度で、このポーラロンが消失することから、電圧をパラメータにした場合には、絶対零度は特異的になる。この結果も、電流が非平衡における自然なパラメータであることを示唆している。

§ 2.2–§ 2.8 の各節では、モデルを説明し、非平衡定常状態を構成して自己無撞着方程式を導き、一様解、ソリトン解、ポーラロン解を求める。続いて § 2.9 では、一様解の相図、ギャップの電流、電圧依存性、電流 - 電圧特性を詳しく調べる。第3章では、関係する他の理論研究と本研究の関係を論じ、TLM モデルと有機導体 θ -type BEDT-TTF の実験結果 [69, 70, 71, 72] との比較も行い、同導体で観測された負の微分伝導度、サイリスター効果の起源について検討する。

2.2 開放的 TLM モデル

前節で述べた様に本論文では、2つの熱浴とコンタクトした有限長の TLM モデル（開放的 TLM モデル）における非平衡相転移を調べる。TLM モデルは量子化された格子変位 $\hat{\Delta}(x)$ と2成分電子場 $\Psi(x) \equiv (d(x), e(x))^T$ からなり、Hamiltonian は次の様に与えられる [53]²。

$$H_S = \int_0^\ell dx \Psi^\dagger(x) \left[-iv\sigma_y \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\Delta}(x)\sigma_x \right] \Psi(x) + \frac{1}{2\pi v\lambda} \int_0^\ell dx \left[\hat{\Delta}(x)^2 + \frac{1}{\omega_0^2} \hat{\Pi}(x)^2 \right] \quad (2.1)$$

ここで、 ℓ は系の長さ、 v はフェルミ速度、 σ_i , ($i = x, y, z$) は Pauli 行列、 λ は無次元の結合定数、 ω_0 はフォノン振動数、 $\hat{\Pi}(x)$ は $\hat{\Delta}(x)$ の共役運動量を表す。また、演算子間の交換

² 元々 TLM モデルでは電子スピンの考慮されているが、その影響は一般的な CDW 相、ソリトンについては結合定数の大きさを変えるだけなので重要ではない。他方、ポーラロンについては、スピンレスの場合に平衡状態で存在しないことが知られているためスピンの有無は重要である。本論文では非平衡状態においてはスピンレスの場合でもポーラロンが誘起されることを強調する目的で、スピンレス TLM モデルを調べる。

関係は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \{d(x), d(y)^\dagger\} &= \{e(x), e(y)^\dagger\} = \delta(x - y) , \\ \left[\hat{\Delta}(x), \hat{\Pi}(y) \right] &= i\pi\lambda v\omega_0^2 \delta(x - y) \end{aligned}$$

ここで $\{A, B\} = AB + BA$ 、 $[A, B] = AB - BA$ である。また、電子場の演算子に次の境界条件を課す。

$$d(0) = 0 , \quad e(\ell) = 0 . \quad (2.2)$$

本論文で扱う開放的 TLM モデルは 4 の倍数の格子点からなる SSH モデルが端のみで熱浴に接している場合の連続極限にあたり、 $d(x)$ と $e(x)$ はそれぞれ、SSH モデルの偶数、奇数番目の格子点における消滅演算子に相当する (Appendix A を参照)。なお、TLM の原論文では $d(x)$ 、 $e(x)$ の代わりに right-moving と left-moving の電子場 $\psi_R(x)$ と $\psi_L(x)$

$$\psi_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{d(x) - ie(x)\} , \quad \psi_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e(x) - id(x)\} \quad (2.3)$$

が用いられていることを注意しておく。次に、熱浴の Hamiltonian は次式で与えられる。

$$H_B = \sum_{\nu} \int dk \omega_{k\nu} a_{k\nu}^\dagger a_{k\nu} \quad (2.4)$$

ここで $a_{k\nu}$ ($\nu = L, R$) は熱浴における波数 k の電子の消滅演算子を表し、 $\omega_{k\nu}$ ($\nu = L, R$) は絶対零度での化学ポテンシャルを基準にしたエネルギーである。なお、当然ながら交換関係 $\{a_{k\nu}, a_{k'\nu'}\} = \delta_{\nu\nu'} \delta(k - k')$ が成り立つ。さらに、熱浴と系の相互作用は双線形であると仮定する。

$$V = \int dk \left\{ v_k e^\dagger(0) a_{kL} + w_k d^\dagger(\ell) a_{kR} + (\text{h.c.}) \right\} \quad (2.5)$$

ここで、 v_k 、 w_k はトンネル結合の行列要素である。従って、全系の Hamiltonian は以下のように与えられる。

$$H = H_S + V + H_B . \quad (2.6)$$

本章では、(2.6) に平均場近似を適用して TLM モデルの非平衡相転移を論じるが、非平衡状態では自由エネルギー最少の条件を用いることができないので、代わりに格子変位 $\hat{\Delta}$ の運動方程式を用いる。それは、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\Delta}(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{i} [\hat{\Delta}(x, t), H] = \hat{\Pi}(x, t) \\ \frac{\partial^2 \hat{\Delta}(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \hat{\Pi}(x, t)}{\partial t} = -\omega_0^2 \left(\hat{\Delta}(x, t) + \pi v \lambda \Psi^\dagger(x, t) \sigma_x \Psi(x, t) \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

後述するように、C*代数の結果から、(2.6) の H は任意の平均場に対して NESS を持つことが言える。すなわち、 $\hat{\Delta}(x)$ を C 数に固定することが正当化されれば、平均場近似の下ではきちんと NESS を構成できることになる。

2.3 NESS の構成 - 開放的多準位モデル -

TLM モデルの解析の前に Hamiltonian が双線形で熱浴と系の相互作用が分離型かつ粒子数が保存している場合の NESS を調べ、Landauer 公式を導く (TLM モデルはこのクラスに入る) Hamiltonian は

$$\begin{aligned}
 H &= H_S + H_B + V \\
 H_S &= \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda} f_{\lambda}^{\dagger} f_{\lambda} \\
 H_B &= \sum_{\nu} \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}\nu} a_{\mathbf{k}\nu}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\nu} \\
 V &= \sum_{\lambda, \nu} \int d\mathbf{k} u_{\mathbf{k}}^{\nu} w_{\lambda}^{\nu} a_{\mathbf{k}\nu}^{\dagger} f_{\lambda} + (\text{h.c.})
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

与えられる。ここで、再び $a_{\mathbf{k}\nu}$ は熱浴 $\nu = L, R$ の波数 \mathbf{k} の電子の消滅演算子で、 f_{λ} は部分系のエネルギー ϵ_{λ} の電子の消滅演算子である。 H は双線形なので、incoming field $\alpha_{\mathbf{k}\nu}$ は $a_{\mathbf{k}\nu}, f_{\lambda}$ の線形結合で表される。例えば、 $\alpha_{\mathbf{k}L}$ は、

$$\alpha_{\mathbf{k}L} = a_{\mathbf{k}L} + \sum_{\lambda} h_{\lambda}^{\mathbf{k}} f_{\lambda} + \int d\mathbf{k}' (m_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'L} + n_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'R}) ,$$

である。上式を $[\alpha_{\mathbf{k}L}, H] = \omega_{\mathbf{k}L} \alpha_{\mathbf{k}L}$ に代入し辺々比較すれば、

$$\alpha_{\mathbf{k}L} = a_{\mathbf{k}L} + \sum_{\lambda} h_{\lambda}^{\mathbf{k}} f_{\lambda} + \int d\mathbf{k}' \left(\frac{u_{\mathbf{k}'}^{L*} A_{\mathbf{k}}^L}{\omega_{\mathbf{k}L} - \omega_{\mathbf{k}'L} \pm i0} + \frac{u_{\mathbf{k}'}^{R*} A_{\mathbf{k}}^R}{\omega_{\mathbf{k}L} - \omega_{\mathbf{k}'R} \pm i0} \right) , \tag{2.9}$$

$$h_{\lambda}^{\mathbf{k}} = \frac{w_{\lambda}^L}{\omega_{\mathbf{k}L} - \epsilon_{\lambda} \pm i0} \{u_{\mathbf{k}}^L + A_{\mathbf{k}}^L \xi_{\pm}^L(\omega_{\mathbf{k}L})\} + \frac{A_{\mathbf{k}}^R w_{\lambda}^R}{\omega_{\mathbf{k}L} - \epsilon_{\lambda} \pm i0} A_{\mathbf{k}}^R \eta_{\pm}^R(\omega_{\mathbf{k}L}) , \tag{2.10}$$

が得られる。但し、 $A_{\mathbf{k}}^{\nu} = \sum_{\lambda} w_{\lambda}^{\nu*} h_{\lambda}^{\mathbf{k}}$ であり、 $\xi_{\pm}^{\nu}(\omega), \eta_{\pm}^{\nu}(\omega)$ は次式で定義される。

$$\xi_{\pm}^{\nu}(\omega) \equiv \int d\mathbf{k}' \frac{|u_{\mathbf{k}'}^{\nu}|^2}{\omega - \omega_{\mathbf{k}'L} \pm i0} , \quad \eta_{\pm}^{\nu}(\omega) \equiv \int d\mathbf{k}' \frac{|u_{\mathbf{k}'}^{\nu}|^2}{\omega - \omega_{\mathbf{k}'R} \pm i0}$$

(2.10) を $A_{\mathbf{k}}^{\nu}$ の定義に代入すると

$$\begin{aligned}
 A_{\mathbf{k}}^L &= u_{\mathbf{k}}^L S_{LL}(\omega_{\mathbf{k}L}) + \xi_{\pm}^L(\omega_{\mathbf{k}L}) S_{LL}(\omega_{\mathbf{k}L}) A_{\mathbf{k}}^L + \eta_{\pm}^R(\omega_{\mathbf{k}L}) S_{RL}(\omega_{\mathbf{k}L}) A_{\mathbf{k}}^R , \\
 A_{\mathbf{k}}^R &= u_{\mathbf{k}}^L S_{LR}(\omega_{\mathbf{k}L}) + \xi_{\pm}^L(\omega_{\mathbf{k}L}) S_{LR}(\omega_{\mathbf{k}L}) A_{\mathbf{k}}^L + \eta_{\pm}^R(\omega_{\mathbf{k}L}) S_{RR}(\omega_{\mathbf{k}L}) A_{\mathbf{k}}^R ,
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$S_{\nu\nu'}(\omega) \equiv \sum_{\lambda} \frac{w_{\lambda}^{\nu} w_{\lambda}^{\nu'*}}{\omega - \epsilon_{\lambda} + \pm i0} ,$$

とした。この時 $A_{\mathbf{k}}^{\nu}$ は、

$$\begin{pmatrix} A_{\mathbf{k}}^L \\ A_{\mathbf{k}}^R \end{pmatrix} = \frac{u_{\mathbf{k}}^L}{\Lambda_{\pm}(\omega)} \begin{pmatrix} S_{LL}(\omega) - \eta_{\pm}^R(\omega) \{S_{RR}(\omega) S_{LL}(\omega) - S_{RL}(\omega) S_{LR}(\omega)\} \\ S_{LR}(\omega) \end{pmatrix} \bigg|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}L}} ,$$

で与えられる。但し、

$$\Lambda_{\pm}(\omega) \equiv 1 - \xi_{\pm}^L(\omega)S_{LL}(\omega) - \eta_{\pm}^R(\omega)S_{RR}(\omega) \\ + \xi_{\pm}^L(\omega)\eta_{\pm}^R(\omega)\{S_{LL}(\omega)S_{RR}(\omega) - S_{RL}(\omega)S_{LR}(\omega)\},$$

である。同様にして、incoming field α_{kR} は

$$\alpha_{kR} = a_{kR} + \sum_{\lambda} \tilde{h}_{\lambda}^k f_{\lambda} + \int d\mathbf{k}' \left(\frac{u_{\mathbf{k}'}^{L*} B_{\mathbf{k}}^L}{\omega_{kR} - \omega_{k'L} \pm i0} + \frac{u_{\mathbf{k}'}^{R*} B_{\mathbf{k}}^R}{\omega_{kR} - \omega_{k'R} \pm i0} \right), \quad (2.11) \\ \tilde{h}_{\lambda}^k = \frac{w_{\lambda}^L}{\omega_{kR} - \epsilon_{\lambda} \pm i0} B_{\mathbf{k}}^L \xi_{\pm}^L(\omega_{kR}) + \frac{w_{\lambda}^R}{\omega_{kR} - \epsilon_{\lambda} \pm i0} \{u_{\mathbf{k}}^R + B_{\mathbf{k}}^R \eta_{\pm}^R(\omega_{kR})\},$$

で与えられる。ここで、 $B_{\mathbf{k}}^{\nu}$ は、次式で定義される。

$$\begin{pmatrix} B_{\mathbf{k}}^L \\ B_{\mathbf{k}}^R \end{pmatrix} = \frac{u_{\mathbf{k}}^R}{\Lambda_{\pm}(\omega)} \begin{pmatrix} S_{RL}(\omega) \\ S_{RR}(\omega) - \xi_{\pm}^L(\omega)\{S_{RR}(\omega)S_{LL}(\omega) - S_{RL}(\omega)S_{LR}(\omega)\} \end{pmatrix} \Big|_{\omega=\omega_{kR}}$$

最後に、分母の虚部の符号を決めておこう。これは、境界条件 $e^{iHt}a_{k\nu}e^{-iHt}e^{i\omega_{k\nu}t} \rightarrow \alpha_{k\nu}$, ($t \rightarrow -\infty$) より決まる。(2.9)、(2.11) より、熱浴の演算子を incoming field で表すことができる。例えば、左熱浴の演算子は、

$$e^{iHt}a_{kL}e^{-iHt}e^{i\omega_{kL}t} - \alpha_{kL} \\ = \int d\mathbf{k}' \left(\frac{u_{\mathbf{k}}^{L*} A_{\mathbf{k}'}^L \alpha_{\mathbf{k}'L} e^{-i(\omega_{k'L} - \omega_{kL})}}{\omega_{k'L} - \omega_{kL} \pm i0} + \frac{u_{\mathbf{k}}^{R*} A_{\mathbf{k}'}^R \alpha_{\mathbf{k}'R} e^{-i(\omega_{k'R} - \omega_{kL})}}{\omega_{k'L} - \omega_{kR} \pm i0} \right),$$

となり、この項が $t \rightarrow -\infty$ で消える条件から分母虚部の符号はきまる。 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{-ixt}}{x + i0} = 0$ を用いれば、分母の符号をマイナスに選んでおけば境界条件が満たされることが分かる。右熱浴の incoming field についても同様な理由で分母にある虚部の符号はマイナスに選ぶ。incoming field を用いると NESS における物理量の計算は Wick の定理を用いて簡単に実行できる。例として、電流を計算してみよう。連続の方程式より、電流は空間的に一様であるから、左熱浴の電子数変化を調べればよく、(1.4) より、

$$J \equiv \langle \hat{J}_{L \rightarrow R} \rangle = e \left\langle \int d\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial t} (a_{\mathbf{k}L}^{\dagger} a_{\mathbf{k}L}) \right\rangle \\ = 2e \int d\mathbf{k} \sum_{\lambda} \text{Im} \left[u_{\mathbf{k}}^L w_{\lambda}^L \langle a_{\mathbf{k}L}^{\dagger} f_{\lambda} \rangle \right] \\ = 2e \int d\mathbf{k} \{ u_{\mathbf{k}}^L A_{\mathbf{k}}^{L*} f_L(\omega_{kL}) + \xi_{-}^L(\omega_{kL}) |A_{\mathbf{k}}^L|^2 f_L(\omega_{kL}) + \xi_{-}^L(\omega_{kR}) |B_{\mathbf{k}}^L|^2 f_R(\omega_{kR}) \}$$

が得られ、さらに、 $\text{Im } \xi_{-}^{\nu}(\omega) = \pi \int d\mathbf{k} |u_{\mathbf{k}}^{\nu}|^2 \delta(\omega - \omega_{kL})$ 、 $\text{Im } \eta_{-}^{\nu}(\omega) = \pi \int d\mathbf{k} |u_{\mathbf{k}}^{\nu}|^2 \delta(\omega - \omega_{kR})$ を用いると

$$\langle \hat{J}_{L \rightarrow R} \rangle = \frac{2e}{\pi} \int d\omega \frac{\text{Im } \xi_{-}^L(\omega) \text{Im } \eta_{-}^R(\omega)}{|\Lambda_{-}(\omega)|^2} |S_{RL}(\omega)|^2 (f_R(\omega) - f_L(\omega)), \quad (2.12)$$

つまり、Landauer 公式が導ける。

2.4 平均場近似 TLM モデルの NESS と自己無撞着方程式

本節では前節の結果を用い、平均場近似のもとで格子変位の期待値 $\Delta(x) \equiv \langle \hat{\Delta}(x) \rangle_\infty$ に関する自己無撞着方程式と Green 関数の関係を導く。

平均場近似の下での NESS は、次の平均場 Hamiltonian の下での $a_{\mathbf{k}\nu}$ の incoming field $\alpha_{\mathbf{k}\nu}$ を用いて、(1.4) で特徴付けられる。

$$\begin{aligned} H_{\text{MF}} &= H_S^{\text{MF}} + V + H_B \\ H_S^{\text{MF}} &\equiv \int_0^\ell dx \Psi^\dagger(x) \left[-iv\sigma_y \frac{\partial}{\partial x} + \Delta(x)\sigma_x \right] \Psi(x) . \end{aligned}$$

平均場 Hamiltonian H_{MF} は電子場の生成・消滅演算子に関して双線形なので、incoming field は前節の方法で求められる。

いま、 $\hat{h} \equiv [-iv\sigma_y \frac{\partial}{\partial x} + \Delta(x)\sigma_x]$ とおき、その固有関数を $\phi_\lambda(x)$ とする。

$$\hat{h}\phi_\lambda(x) = \epsilon_\lambda\phi_\lambda(x), \quad \phi_\lambda(x) \equiv \begin{pmatrix} \phi_\lambda^+(x) \\ \phi_\lambda^-(x) \end{pmatrix}$$

但し、 $\phi^+(0) = \phi^-(\ell) = 0$ 。 $\phi_\lambda(x)$ が完全系をなすから、電子場の演算子は

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} d(x) \\ e(x) \end{pmatrix} = \sum_\lambda \phi_\lambda(x) f_\lambda,$$

と展開される。ここで、 f_λ は $\{f_\lambda, f_{\lambda'}^\dagger\} = \delta_{\lambda,\lambda'}$ をみたす。従って、平均場 Hamiltonian は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} H_{\text{MF}} &= \sum_\lambda \epsilon_\lambda f_\lambda^\dagger f_\lambda + \sum_\nu \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}\nu} a_{\mathbf{k}\nu}^\dagger a_{\mathbf{k}\nu} \\ &\quad \sum_\lambda \int d\mathbf{k} \left\{ v_{\mathbf{k}}^* \phi_\lambda^-(0) a_{\mathbf{k}L}^\dagger f_\lambda + w_{\mathbf{k}}^* \phi_\lambda^+(\ell) a_{\mathbf{k}R}^\dagger f_\lambda + (\text{h.c.}) \right\} \end{aligned}$$

すなわち、前節の一般論の (2.8) 式で、

$$u_k^L w_\lambda^L \equiv v_{\mathbf{k}}^* \phi_\lambda^-(0), \quad u_k^R w_\lambda^R \equiv w_{\mathbf{k}}^* \phi_\lambda^+(\ell),$$

とおいたものが得られる。

そして、補助関数 $S_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = L, R)$ は、 \hat{h} の Green 関数 $g_{\sigma\tau}(x, y; \omega) \equiv \sum_\lambda \frac{\phi_\lambda^\sigma(x) \phi_\lambda^\tau(y)^*}{\omega - \epsilon_\lambda - i0}$ を用いると、

$$\begin{aligned} S_{LL}(\omega) &= g_{--}(0, 0; \omega), \quad S_{RR}(\omega) = g_{++}(\ell, \ell; \omega), \\ S_{LR}(\omega) &= g_{-+}(0, \ell; \omega), \quad S_{RL}(\omega) = g_{+-}(\ell, 0; \omega) \\ \xi_\pm^L(z) &= \int d\mathbf{k}' \frac{|v_{\mathbf{k}'}|^2}{z - \omega_{\mathbf{k}'L} \pm i0}, \quad \eta_\pm^R(z) = \int d\mathbf{k}' \frac{|w_{\mathbf{k}'}|^2}{z - \omega_{\mathbf{k}'R} \pm i0} \end{aligned}$$

となる。これらの関数を用いると漸近場 (incoming field) $\alpha_{\mathbf{k}\nu}$ は、(2.9)、(2.11) で与えられる。漸近場は完全なので、元の演算子は $\alpha_{\mathbf{k}\nu}$ で表すことができる。例えば、 $\Psi(x)$ は、

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} \phi_{\lambda}^{+}(x) \\ \phi_{\lambda}^{-}(x) \end{pmatrix} \int d\mathbf{k} \left(h_{\lambda}^{\mathbf{k}*} \alpha_{\mathbf{k}L} + \tilde{h}_{\lambda}^{\mathbf{k}*} \alpha_{\mathbf{k}R} \right) \\ &= \int d\mathbf{k} \left\{ v_{\mathbf{k}} \frac{h(x; \omega_{kL})}{\Lambda_{-}(\omega_{kL})^{*}} \alpha_{\mathbf{k}L} + w_{\mathbf{k}} \frac{\tilde{h}(x; \omega_{kR})}{\Lambda_{-}(\omega_{kR})^{*}} \alpha_{\mathbf{k}R} \right\},\end{aligned}\quad (2.13)$$

となる。ここで、 $\Lambda_{-}(\omega)$ 、 $h(x; \omega)$ 、 $\tilde{h}(x; \omega)$ は次式で与えられる補助関数である。

$$\begin{aligned}\Lambda_{-}(\omega) &= 1 - v\tilde{\xi}_{-}(\omega)g_{--}(0, 0; \omega) - v\tilde{\eta}_{-}(\omega)g_{++}(\ell, \ell; \omega) \\ &\quad + v^2\tilde{\xi}_{-}(\omega)\tilde{\eta}_{-}(\omega)\{g_{++}(\ell, \ell; \omega)g_{--}(0, 0; \omega) - g_{+-}(\ell, 0; \omega)g_{-+}(0, \ell; \omega)\} \\ h(x; \omega) &= G(x, 0; \omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \{1 - vg_{++}(\ell, \ell; \omega)\tilde{\eta}_{+}(\omega)\} \\ &\quad + G(x, \ell; \omega) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} vg_{+-}(\ell, 0; \omega)\tilde{\eta}_{+}(\omega) \\ \tilde{h}(x; \omega) &= G(x, 0; \omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} vg_{-+}(0, \ell; \omega)\tilde{\xi}_{+}(\omega) \\ &\quad + G(x, \ell; \omega) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \{1 - vg_{--}(0, 0; \omega)\tilde{\xi}_{+}(\omega)\} \\ G(x, y; \omega) &\equiv \begin{pmatrix} g_{++}(x, y; \omega) & g_{+-}(x, y; \omega) \\ g_{-+}(x, y; \omega) & g_{--}(x, y; \omega) \end{pmatrix} \\ \tilde{\xi}_{\pm}(\omega) &= \frac{1}{v} \int d\mathbf{k}' \frac{|v_{\mathbf{k}'}|^2}{\omega - \omega_{k'L} \pm i0}, \quad \tilde{\eta}_{\pm}(\omega) = \frac{1}{v} \int d\mathbf{k}' \frac{|w_{\mathbf{k}'}|^2}{\omega - \omega_{k'R} \pm i0}\end{aligned}$$

なお、関係式 $\hat{h} \begin{pmatrix} \phi_{\lambda}^{+}(x) \\ \phi_{\lambda}^{-}(x) \end{pmatrix} = \epsilon_{\lambda} \begin{pmatrix} \phi_{\lambda}^{+}(x) \\ \phi_{\lambda}^{-}(x) \end{pmatrix}$ から、

$$\begin{aligned}\hat{h} \begin{pmatrix} g_{+\sigma}(x, y; \omega) \\ g_{-\sigma}(x, y; \omega) \end{pmatrix} &= z \begin{pmatrix} g_{+\sigma}(x, y; \omega) \\ g_{-\sigma}(x, y; \omega) \end{pmatrix} - \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} \phi_{\lambda}^{+}(x) \\ \phi_{\lambda}^{-}(x) \end{pmatrix} \phi_{\lambda}^{\sigma}(y)^{*} \\ &= z \begin{pmatrix} g_{+\sigma}(x, y; \omega) \\ g_{-\sigma}(x, y; \omega) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_{+\sigma} \\ \delta_{-\sigma} \end{pmatrix} \delta(x - y)\end{aligned}$$

となるので、Green 関数 $G(x, y; \omega)$ が、次式を満たすことがわかる。

$$\hat{h}(x, y; \omega) = \left[-iv\sigma_y \frac{\partial}{\partial x} + \Delta(x)\sigma_x \right] G(x, y; \omega) = \omega G(x, y; \omega) - \mathbf{1}\delta(x - y) \quad (2.14)$$

$$g_{++}(0, y; \omega) = g_{+-}(0, y; \omega) = g_{-+}(\ell, y; \omega) = g_{--}(\ell, y; \omega) = 0 \quad (2.15)$$

但し、(2.15) は $\phi_{\lambda}^{+}(0) = 0$ 、 $\phi_{\lambda}^{-}(\ell) = 0$ から導かれる境界条件である。Green 関数、 Λ_{-} 、 h 、 \tilde{h} は ω が \hat{h} の固有値と等しくなるところで発散するが、(2.13) の被積分関数は、分子、分母の発散が打消すため、有限にとどまる。

次に、自己無撞着条件を考えよう。NESS では、 $\frac{\partial^2 \hat{\Delta}(x)}{\partial t^2}$ の平均値が 0 となるべきなので、秩序変数 $\Delta(x)$ は、格子変位の運動方程式 (2.7) の固定点条件を満たさなければならない。

$$0 = \frac{-1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \Delta(x)}{\partial t^2} = \Delta(x) + \pi v \lambda \langle \Psi^\dagger(x) \sigma_x \Psi(x) \rangle_\infty$$

上式に (1.4)、(2.13)、 $\int d\mathbf{k} |v_{\mathbf{k}}|^2 F(\omega_{kL}) = v \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) \text{Im} \tilde{\xi}_-(\omega)/\pi$ および、 $\tilde{\eta}_-(\omega)$ に関する同様な公式を用いれば、自己無撞着方程式は次の様に表される。

$$\begin{aligned} \frac{v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ \text{Im} \tilde{\xi}_-(\omega) \frac{h(x; \omega)^\dagger \sigma_x h(x; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} f_L(\omega) \right. \\ \left. + \text{Im} \tilde{\eta}_-(\omega) \frac{\tilde{h}(x; \omega)^\dagger \sigma_x \tilde{h}(x; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} f_R(\omega) \right\} = -\frac{\Delta(x)}{\pi v \lambda}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

さらに、前節の (2.12) より、電流の平均値は、

$$\langle J_{L \rightarrow R} \rangle = \frac{2ev^2}{\pi} \int d\omega \frac{\text{Im} \tilde{\xi}_-(\omega) \text{Im} \tilde{\eta}_-(\omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} |g_{-+}(0, \ell; \omega)|^2 (f_R(\omega) - f_L(\omega)) \quad (2.17)$$

となる。

2.5 Green 関数と補助関数

自己無撞着方程式及び電流を計算するには Green 関数が必要である。そこで、本節では、Green 関数を具体的に導出し、 $h(x)$, $\tilde{h}(x)$, Λ_- を求める。なお、本節では表記の煩雑さをさけるため、 ω に依存する関数の ω 依存性は陽には書かないことにする。

2.5.1 Green 関数

本節では、Green 関数を、

$$\hat{h}\phi(x) = \omega\phi(x) \quad (2.18)$$

の 1 次独立な解 $(x_1(x), y_1(x))^T$, $(x_2(x), y_2(x))^T$ で表すことを考えよう。(2.14)、(2.15) より、Green 関数は、 $x \neq y$ で

$$\begin{aligned} \left(v \frac{\partial}{\partial x} + \Delta(x) \right) g_{+\sigma}(x, y) &= \omega g_{-\sigma}(x, y), \\ \left(-v \frac{\partial}{\partial x} + \Delta(x) \right) g_{-\sigma}(x, y) &= \omega g_{+\sigma}(x, y), \end{aligned}$$

を満たす。まず、 $x_1(0) = 0$, $y_2(\ell) = 0$ ととることが常に可能であることに注意する。よって、 $x_1(0) = 0$, $y_2(\ell) = 0$ と境界条件 $g_{+\sigma}(0, y) = g_{-\sigma}(\ell, y) = 0$ から、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_{+\sigma}(x, y; z) \\ g_{-\sigma}(x, y; z) \end{pmatrix} &= A_\sigma(y) \begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix}, \quad (x < y) \\ \begin{pmatrix} g_{+\sigma}(x, y; z) \\ g_{-\sigma}(x, y; z) \end{pmatrix} &= B_\sigma(y) \begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad (x > y) \end{aligned}$$

とおくことができる。ここで、 $g_{\sigma\tau}(x, y) = g_{\tau\sigma}(y, x)^*$ より、

$$\begin{aligned} A_+(y) &= Cx_2(y)^*, \quad A_-(y) = Cy_2(y)^* \\ B_+(y) &= C^*x_1(y)^*, \quad B_-(y) = C^*y_1(y)^* \end{aligned}$$

であることがわかり、 $x = y$ での飛び条件 $g_{+\sigma}(y+0, y) - g_{+\sigma}(y-0, y) = -\frac{1}{v}\delta_{-\sigma}$ 、
 $g_{-\sigma}(y+0, y) - g_{-\sigma}(y-0, y) = \frac{1}{v}\delta_{+\sigma}$ から次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} g_{++}(x, y) \\ g_{+-}(x, y) \end{pmatrix} = \frac{x_2(y)}{W} \begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix}, \quad (x < y) \quad (2.19)$$

$$\begin{pmatrix} g_{+-}(x, y) \\ g_{--}(x, y) \end{pmatrix} = \frac{y_2(y)}{W} \begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix}, \quad (x < y) \quad (2.20)$$

$$\begin{pmatrix} g_{++}(x, y) \\ g_{+-}(x, y) \end{pmatrix} = \frac{x_1(y)}{W} \begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad (x > y) \quad (2.21)$$

$$\begin{pmatrix} g_{+-}(x, y) \\ g_{--}(x, y) \end{pmatrix} = \frac{y_1(y)}{W} \begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad (x > y) \quad (2.22)$$

但し、 $W(\omega) = v(x_1(x)y_2(x) - y_1(x)x_2(x))$ は Wronskian である。

本論文では、 $\Delta(x)$ として一様解、ソリトン解、ポーラロン解を考える。微分方程式 (2.18) の一般解を $(\phi_1(x), \phi_2(x))^T$ とすると、一様解の場合には、 $(\phi_1(x+a), \phi_2(x+a))^T$ も、ソリトン解の場合には、 $(f(x), \phi_2(x+a))^T$ も (2.18) の解である (但し、 $\omega f(x) \equiv -v\phi_2(x+a) + \Delta(x)\phi_2(x+a)$)。この対称性を用いると、例えば、電子場の演算子と incoming field の関係式 (2.13) に現れる補助関数 $h(x)$ 、

$$h(x) = \begin{pmatrix} g_{+-}(x, 0) - v\tilde{\eta}_+\{g_{++}(\ell, \ell)g_{+-}(x, 0) - g_{+-}(\ell, 0)g_{++}(x, \ell)\} \\ g_{--}(x, 0) - v\tilde{\eta}_+\{g_{++}(\ell, \ell)g_{--}(x, 0) - g_{+-}(\ell, 0)g_{-+}(x, \ell)\} \end{pmatrix}$$

の中の $\tilde{\eta}_+$ に比例する項;

$$\begin{aligned} g_{++}(\ell, \ell)g_{+-}(x, 0) - g_{+-}(\ell, 0)g_{++}(x, \ell) &= \frac{y_1(0)x_2(\ell)}{W^2} (x_1(\ell)x_2(x) - x_2(\ell)x_1(x)) \\ g_{++}(\ell, \ell)g_{--}(x, 0) - g_{+-}(\ell, 0)g_{-+}(x, \ell) &= \frac{y_1(0)x_2(\ell)}{W^2} (x_1(\ell)y_2(x) - x_2(\ell)y_1(x)) \end{aligned}$$

の分子が Wronskian に比例することが示せ、 $h(x)$ を単純にすることができる。特に、微分方程式 (2.18) が空間並進対称性を持つ場合は、微分演算子 \hat{h} が 1 階 2×2 行列微分演算子であるという性質のみを用いて議論することができる。そのため、以下 2 節で論じる計算方法はこの種の問題全般に用いることができる。

2.5.2 微分方程式 (2.18) が空間並進対称の場合

$(x_1(x), y_1(x))^T$ は、境界条件 $x_1(0) = 0$ を満たす微分方程式 (2.18) の解である。これを微分方程式 (2.18) の 2 つの独立解の線形結合で表すと、

$$\begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1(x-\ell) \\ y_1(x-\ell) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

と書きなおすことができる。但し、 $x_1(\ell) = \beta x_2(\ell)$, $y_1(\ell) = \alpha y_1(0)$ 。従って、

$$\frac{y_1(0)x_2(\ell)}{W^2} (x_1(\ell)x_2(x) - x_2(\ell)x_1(x)) = \frac{x_2(\ell)x_1(x-\ell)}{vW},$$

となる。同様な変形を行えば、

$$h(x) = \frac{y_1(0)}{W} \begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} - \tilde{\eta}_+ \frac{x_2(\ell)}{W} \begin{pmatrix} x_1(x-\ell) \\ y_1(x-\ell) \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

が示せる。また、

$$\begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \frac{y_2(0)}{y_1(0)} \begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix} + \frac{x_2(0)}{x_2(\ell)} \begin{pmatrix} x_2(x+\ell) \\ y_2(x+\ell) \end{pmatrix},$$

より、 $h(x)$ の時と同様に、

$$\tilde{h}(x) \equiv \begin{pmatrix} g_{++}(x, \ell) - v\tilde{\xi}_+ \{g_{++}(x, \ell)g_{--}(0, 0) - g_{+-}(x, 0)g_{-+}(0, \ell)\} \\ g_{-+}(x, \ell) - v\tilde{\xi}_+ \{g_{-+}(x, \ell)g_{--}(0, 0) - g_{--}(x, 0)g_{-+}(0, \ell)\} \end{pmatrix},$$

が、次のように計算できる。

$$\tilde{h}(x) = \frac{x_2(\ell)}{W} \begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix} - \tilde{\xi}_+ \frac{y_1(0)}{W} \begin{pmatrix} x_2(x+\ell) \\ y_2(x+\ell) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

さらに、 Λ_- は、

$$\begin{aligned} \Lambda_-(\omega) &= 1 - v\tilde{\xi}_- g_{--}(0, 0) - v\tilde{\eta}_- g_{++}(\ell, \ell) \\ &\quad + v^2 \tilde{\xi}_- \tilde{\eta}_- \{g_{++}(\ell, \ell)g_{--}(0, 0) - g_{+-}(\ell, 0)g_{-+}(0, \ell)\} \\ &= 1 - v\tilde{\xi}_- \frac{y_1(0)y_2(0)}{W} - v\tilde{\eta}_- \frac{x_1(\ell)x_2(\ell)}{W} + v \frac{x_2(\ell)y_1(-\ell)}{W} \tilde{\xi}_- \tilde{\eta}_-, \end{aligned}$$

となる。

2.5.3 微分方程式 (2.18) のうち1成分のみが空間並進対称の場合

微分方程式 (2.18) の一般解を $(\phi_1(x), \phi_2(x))^T$ とし、 $(f(x), \phi_2(x+a))^T$ も (2.18) の解である場合を考える。但し、 $\omega f(x) \equiv -v\phi_2(x+a) + \Delta(x)\phi_2(x+a)$ である。

すなわち、

$$\begin{aligned} \omega f(x) &= -v\phi_2'(x \pm \ell) + \Delta(x)\phi_2(x \pm \ell) \\ \omega\phi_1(x \pm \ell) &= -v\phi_2'(x \pm \ell) + \Delta(x \pm \ell)\phi_2(x \pm \ell) \end{aligned}$$

これより、 $f(x) = \phi_1(x \pm \ell) + \frac{\Delta(x) - \Delta(x \pm \ell)}{\omega} \phi_2(x \pm \ell)$ となるので、 $\phi_1 = x_1$, $\phi_2 = y_1$ とおくと $(x_1(x), y_1(x))^T$ が

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} x_1(x-\ell) + A(x)y_1(x-\ell) \\ y_1(x-\ell) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \\ A(x) &\equiv \frac{\Delta(x) - \Delta(x-\ell)}{\omega}, \quad \alpha \equiv \frac{y_1(\ell)}{y_1(0)}, \quad \beta \equiv \frac{x_1(\ell) - y_1(\ell)A(\ell)}{x_2(\ell)} \end{aligned}$$

と表されることがわかる。従って、

$$\begin{aligned}\frac{vx_2(\ell)y_1(0)}{W}\{x_1(\ell)x_2(x) - x_2(\ell)x_1(x)\} &= x_2(\ell)\{x_1(x - \ell) + A(x)y_1(x - \ell)\} - y_1(0)A(\ell)x_2(x), \\ \frac{vx_2(\ell)y_1(0)}{W}\{x_1(\ell)y_2(x) - x_2(\ell)y_1(x)\} &= x_2(\ell)y_1(x - \ell) - A(\ell)y_1(0)y_2(x),\end{aligned}$$

となるから、 $h(x)$ は、以下の様になる。

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{y_1(0)}{W} \begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} - \tilde{\eta}_+ \frac{x_2(\ell)}{W} \begin{pmatrix} x_1(x - \ell) + A(x)y_1(x - \ell) \\ y_1(x - \ell) \end{pmatrix} \\ &\quad + \tilde{\eta}_+ \frac{y_1(0)A(\ell)}{W} \begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.25)$$

同様にして

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= \alpha' \begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} x_2(x + \ell) + B(x)y_2(x + \ell) \\ y_2(x + \ell) \end{pmatrix} \\ B(x) &\equiv \frac{\Delta(x) - \Delta(x + \ell)}{z}, \quad \alpha' \equiv \frac{y_2(0)}{y_1(0)}, \quad \beta' \equiv \frac{x_2(0)}{x_2(\ell)}\end{aligned}$$

を用いると \tilde{h} は

$$\tilde{h}(x) = \frac{x_2(\ell)}{W} \begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix} - \tilde{\xi}_+ \frac{y_1(0)}{W} \begin{pmatrix} x_2(x + \ell) + B(x)y_2(x + \ell) \\ y_2(x + \ell) \end{pmatrix}\quad (2.26)$$

となり、さらに、

$$g_{++}(\ell, \ell)g_{--}(0, 0) - g_{+-}(\ell, 0)g_{-+}(0, \ell) = \frac{x_2(\ell)y_1(-\ell) - y_1(0)y_2(0)A(\ell)}{vW}$$

であることを用いれば、 Λ_- は、

$$\begin{aligned}\Lambda_-(\omega) &= 1 - v\tilde{\xi}_-g_{--}(0, 0) - v\tilde{\eta}_-g_{++}(\ell, \ell) \\ &\quad + v^2\tilde{\xi}_-\tilde{\eta}_-\{g_{++}(\ell, \ell; \omega)g_{--}(0, 0; \omega) - g_{+-}(\ell, 0; \omega)g_{-+}(0, \ell; \omega)\} \\ &= 1 - v\tilde{\xi}_-\frac{y_1(0)y_2(0)}{W} - v\tilde{\eta}_-\frac{x_1(\ell)x_2(\ell)}{W} + v\tilde{\xi}_-\tilde{\eta}_-\frac{x_2(\ell)y_1(-\ell) - y_1(0)y_2(0)A(\ell)}{W}\end{aligned}$$

と計算される。

2.6 自己無撞着方程式

以下の3節では各々、空間一様解、ソリトン解、ポーラロン解の場合について、系のサイズ ℓ が大きいとき、境界近くを除いて平衡系と同形の $\Delta(x)$ が自己無撞着方程式をみたすことを示し、解に含まれるパラメータの関係を導く。

TLM モデルでは分散関係を線形化しているため、(2.16) 式のエネルギーにカットオフを入れる必要があることが知られている [53]。そこで、エネルギーカットオフを ω_c ($\omega_c \gg T, e|V|$)

とし、(2.16) の積分範囲を $(-\omega_c, \omega_c)$ で置き換える。さらに、ハーフィルドの状態に電圧 V をかけた場合を考え、化学ポテンシャルを $\mu_L = -\mu_R = -eV/2$ とおく (e は素電荷) と、(2.27) が得られる (Appendix B で示すように、この化学ポテンシャルは、クーロンエネルギーを最小にする条から定まる)。以上から自己無撞着方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{v}{\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega \left\{ \text{Im} \tilde{\xi}_-(\omega) \frac{h(x; \omega)^\dagger \sigma_x h(x; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} \frac{1}{e^{\beta_L(\omega + \frac{eV}{2})} + 1} \right. \\ \left. + \text{Im} \tilde{\eta}_-(\omega) \frac{\tilde{h}(x; \omega)^\dagger \sigma_x \tilde{h}(x; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} \frac{1}{e^{\beta_R(\omega - \frac{eV}{2})} + 1} \right\} = -\frac{\Delta(x)}{\pi v \lambda}, \quad (2.27) \end{aligned}$$

となる。以下、この方程式を調べていこう。

2.6.1 空間一様解

本節では $\Delta(x) = \Delta_0$ の時、 $x = \ell \hat{x}$ ($0 \leq \hat{x} \leq 1$) とおくと $0 < \hat{x} < 1$, $\ell \rightarrow \infty$ の極限で (2.27) の左辺が \hat{x} に依存しないことを示し、 Δ_0 の方程式を導く。

$\Delta(x) = \Delta_0$ の時には (2.14)、(2.15) は簡単に解け、例えば、自己無撞着方程式 (2.27) の左辺第2項は、次の様に変形される (Appendix C 参照)。

$$\begin{aligned} \int_{|\omega| < \omega_c} d\omega \text{Im} \eta_-(\omega) \frac{\tilde{h}(x; \omega)^\dagger \sigma_x \tilde{h}(x; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} f_R(\omega) \\ = \int_{|\omega| < \omega_c} d\omega \frac{\text{Im} \eta_-(\omega) f_R(\omega)}{|v^2 D(\omega) \Lambda_-(\omega)|^2} \left\{ \kappa v \omega v^2 (1 - |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2) \sin 2\kappa x \right. \\ \left. - v^2 (\omega \Delta_0 + 2\omega^2 \text{Re} \tilde{\xi}_-(\omega) + \omega \Delta_0 |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2) \cos 2\kappa x \right. \\ \left. + v^2 \Delta_0 (\omega + 2\Delta_0 \text{Re} \tilde{\xi}_-(\omega) + \omega |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2) \right\} \text{sgn}(|\omega| - |\Delta_0|) \quad (2.28) \end{aligned}$$

ここで、 $\kappa = \sqrt{\omega^2 - \Delta_0^2}/v$ 、 $D(\omega) = v\kappa \cos \kappa \ell + \Delta_0 \sin \kappa \ell$ 、 $\text{sgn} x = x/|x|$ である。

$\ell \gg 1$ での主要項を導こう。 $|\omega| < |\Delta_0|$ の時には、 κ は純虚数になるため $|D(\omega)|^2 \tilde{h}(x; \omega)^\dagger \sigma_x \tilde{h}(x; \omega) \sim e^{2|\kappa|x}$ 、 $|D(\omega) \Lambda_-(\omega)|^2 \sim e^{2|\kappa|\ell}$ となる。すなわち、(2.28) の積分のうち $|\omega| < \Delta_0$ からの寄与は

$$\frac{\tilde{h}(x; \omega)^\dagger \sigma_x \tilde{h}(x; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} \sim e^{-2|\kappa|\ell(1-\hat{x})}$$

のオーダーになる。従って、この寄与は ℓ が大きく、かつ、 x が TLM 端から離れている場合には無視できる。この意味で $|\Delta_0|$ が平衡状態と同様、電子のエネルギースペクトルのギャップに対応していることを注意しておく。

他方、 $|\omega| > |\Delta_0|$ では κ が実数となり、その積分への寄与は ℓ が十分大きい時も有限である。実際、(2.28) の分母を $|D(\omega) \Lambda_-(\omega)|^2 \equiv |\tilde{\Lambda}_-(\omega, \kappa \ell)|^2$ 、すなわち、 $\theta = \kappa \ell$ と ω の関数として

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_-(\omega, \theta) &= \kappa v (1 - \tilde{\xi}_-(\omega) \tilde{\eta}_-(\omega)) \cos \theta \\ &\quad + (\Delta_0 + \omega \{ \tilde{\xi}_-(\omega) + \tilde{\eta}_-(\omega) \} + \Delta_0 \tilde{\xi}_-(\omega) \tilde{\eta}_-(\omega)) \sin \theta \end{aligned}$$

とおく。そして、 $1/|\tilde{\Lambda}_-(\omega, \theta)|^2$ を θ について Fourier 級数展開し、係数を以下のようにおく。

$$\frac{1}{|\tilde{\Lambda}_-(\omega, \theta)|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ni\theta}}{\zeta_n(\omega)},$$

すると、例えば (2.28) の第 1 項は

$$\begin{aligned} & \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} d\omega \frac{\text{Im}\tilde{\eta}_-(\omega) f_R(\omega)}{|D(\omega)\Lambda_-(\omega)|^2} \kappa\omega(1 - |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2) \sin 2\kappa x \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} \frac{d\omega}{2i} \frac{H(\omega)}{\zeta_n(\omega)} \{e^{2i\kappa\ell(n+\hat{x})} - e^{2i\kappa\ell(n-\hat{x})}\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。ここで、 $H(\omega) = \text{Im}\tilde{\eta}_-(\omega) f_R(\omega) \kappa\omega(1 - |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2)$ である。従って、Riemann-Lebesgue の定理より $0 < \hat{x} < 1$ 、 $\ell \rightarrow \infty$ で (2.29) は 0 に収束する。同様に、第 2、第 3 項も Riemann-Lebesgue の定理を用いて評価すると、(2.28) は $\ell \rightarrow \infty$ の極限で

$$\begin{aligned} & v \int_{|\omega| < \omega_c} d\omega \text{Im}\tilde{\eta}_-(\omega) \frac{\tilde{h}(x; \omega)^\dagger \sigma_x \tilde{h}(x; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} f_R(\omega) \\ &= \Delta_0 \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} d\omega \frac{\text{Im}\tilde{\eta}_-(\omega)}{v\zeta_0(\omega)} f_R(\omega) \left(\omega + 2\Delta_0 \text{Re}\tilde{\xi}_-(\omega) + \omega |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

となることがわかる。すなわち、系が十分に長いとき (ℓ が十分に大きいとき) 自己無撞着方程式 (2.27) の左辺のうち右熱浴に関係する項は \hat{x} に依存しない。左熱浴に関係する項についても同じ議論を行えば、自己無撞着方程式 (2.27) の左辺は \hat{x} に依存せず、かつ Δ_0 に比例することがわかり、 Δ_0 に関する自己無撞着方程式

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= 0 \quad \text{or} \\ \frac{-1}{\lambda} &= \tilde{S}(\Delta_0, V, T_L, T_R), \end{aligned}$$

が導出される。ここで $\tilde{S}(\Delta_0, V, T_L, T_R)$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\Delta_0, V, T_L, T_R) &\equiv \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} d\omega \left\{ \frac{\text{Im}\tilde{\xi}_-(\omega)}{\zeta_0(\omega)} \left(\omega + 2\Delta_0 \text{Re}\tilde{\eta}_-(\omega) + \omega |\tilde{\eta}_-(\omega)|^2 \right) f_L(\omega) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\text{Im}\tilde{\eta}_-(\omega)}{\zeta_0(\omega)} \left(\omega + 2\Delta_0 \text{Re}\tilde{\xi}_-(\omega) + \omega |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2 \right) f_R(\omega) \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

なお、上式中の $1/\zeta_0(\omega)$ は、 $1/|\tilde{\Lambda}_-(\omega, \theta)|^2$ の θ に関する Fourier 級数の無振動成分で、

$$\begin{aligned} \zeta_0(\omega) &= v\kappa \left| \text{Im}\tilde{\xi}_-(\omega) \left\{ \omega + 2\Delta_0 \text{Re}\tilde{\eta}_-(\omega) + \omega |\tilde{\eta}_-(\omega)|^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \text{Im}\tilde{\eta}_-(\omega) \left\{ \omega + 2\Delta_0 \text{Re}\tilde{\xi}_-(\omega) + \omega |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2 \right\} \right|. \end{aligned}$$

与えられる。以下、左右の熱浴の温度は等しく $T \equiv T_L = T_R$ とし、簡単のため $\text{Re}\tilde{\xi}_-(\omega) = \text{Re}\tilde{\eta}_-(\omega) = 0$, $\text{Im}\tilde{\xi}_-(\omega) = \text{Im}\tilde{\eta}_-(\omega)$ と仮定する。このとき、

$$\frac{\omega + \frac{2\Delta_0}{v}\text{Re}\tilde{\eta}_-(\omega) + \frac{\omega}{v^2}|\tilde{\eta}_-(\omega)|^2}{\left|\omega + \frac{2\Delta_0}{v}\text{Re}\tilde{\eta}_-(\omega) + \frac{\omega}{v^2}|\tilde{\eta}_-(\omega)|^2\right|} = \text{sgn}(\omega)$$

が成立するので、 $\tilde{S}(\Delta_0, V, T_L, T_R)\Big|_{T_L=T_R=T}$ は以下の様に計算される。

$$\tilde{S}(\Delta_0, V, T_L, T_R)\Big|_{T_L=T_R=T} \equiv S(\Delta_0, V, T) = \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} \frac{d\omega}{2v\kappa} \text{sgn}(\omega) \{f_L(\omega) + f_R(\omega)\}$$

従って、自己無撞着方程式 (2.27) は

$$\frac{1}{\lambda} = -S(\Delta_0, V, T) = \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \frac{\sinh(\epsilon/T)}{\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh(\epsilon/T)}$$

となる。

2.6.2 ソリトン解

平衡状態にある TLM モデルでは、縮退した一様解をつなぐ静的なソリトンの存在が知られている [53]。そこで本節では、§ 2.6.1 で求めた 2 つの一様解 $\Delta = \pm\Delta_0$ をつなぐソリトン解について調べよう。平衡状態では、

$$\Delta(x) = \Delta_0 \tanh \kappa_s(x - a), \quad \kappa_s = \Delta_0/v,$$

の形のソリトンのみが自己無撞着方程式を満たすことがわかっている [53]、本節でもこのソリトン解の可能性を議論する³。この時、一様解と大きく異なるのは、系の電子状態を表す \hat{h} が $\omega = \pm\sqrt{(v\kappa)^2 + \Delta_0^2}$ に加え、エネルギーギャップ内 $\omega = 0$ に束縛状態を持つことである。実際、 $\hat{h}\phi_B = 0, \phi_B = \begin{pmatrix} 1/\cosh \kappa_s(x - \ell - a) \\ 0 \end{pmatrix}$ 。この \hat{h} のスペクトルの変化が自己無撞着方程式にどのような影響を与えるかみていこう。Appendix C と § 2.5.3 の公式より、電子場 $\Psi(x)$ を、incoming field で展開する展開係数は、

$$h(x; \omega) = \frac{1}{vD} \begin{pmatrix} -v\kappa + \frac{v\kappa}{\omega} \{\Delta(x) - \Delta(\ell)\} \tilde{\eta}_+ \\ v\kappa \tilde{\eta}_+ \end{pmatrix} \cos \kappa(x - \ell) + \frac{1}{vD} \begin{pmatrix} \Delta(x) + \frac{(v\kappa)^2 + \Delta(x)\Delta(\ell)}{\omega} \tilde{\eta}_+ \\ \omega + \Delta(\ell) \tilde{\eta}_+ \end{pmatrix} \sin \kappa(x - \ell) \quad (2.32)$$

$$\tilde{h}(x; \omega) = \frac{1}{vD} \begin{pmatrix} -\frac{v\kappa}{\omega} \{\Delta(x) - \Delta(0)\} + v\kappa \tilde{\xi}_+ \\ -v\kappa \end{pmatrix} \cos \kappa x - \frac{1}{vD} \begin{pmatrix} \frac{\Delta(x)\Delta(0) + (v\kappa)^2}{\omega} + \Delta(x) \tilde{\xi}_+ \\ \Delta(0) + \omega \tilde{\xi}_+ \end{pmatrix} \sin \kappa x \quad (2.33)$$

³ 平衡状態では、 $\Delta_0 = v\kappa_s$ を満たす時、エネルギー的に最も安定になることがわかっている。

$$D\Lambda_-(\omega) = \left[(v\kappa) + \frac{v\kappa}{\omega} \tilde{\eta}_- (\Delta(\ell) - \Delta(0)) - v\kappa \tilde{\xi}_- \tilde{\eta}_- \right] \cos \kappa \ell \\ + \left[\Delta(0) + \omega(\tilde{\xi}_- + \tilde{\eta}_-) + \frac{-\Delta_0^2 + \Delta(0)\Delta(\ell)}{\omega} \tilde{\eta}_- + \Delta(\ell) \tilde{\xi}_- \tilde{\eta}_- \right] \sin \kappa \ell$$

となる。但し、 $\kappa = \sqrt{\omega^2 - \Delta_0^2}/v$ 、 $D(\omega) = v\kappa \cos \kappa \ell + \Delta(0) \sin \kappa \ell$ である。以下、自己無撞着方程式 (2.27) の左辺を評価し、境界から十分離れたところで $\Delta(x) = \Delta_0 \tanh \kappa_s(x - a)$ に比例することを示す。

(A) エネルギーギャップ内のエネルギーをもつ熱浴電子の寄与: $|\omega| < |\Delta_0|$

区間 $|\omega| < |\Delta_0|$ における (2.27) 左辺の積分を評価しよう。これは熱浴から注入される電子のうち、系のギャップ内のエネルギーを持つものからの寄与である。ギャップ内に束縛状態が存在するにもかかわらず、この効果は系の長さ ℓ に対して指数的に小さいことを以下に示す⁴。 $v\kappa = \sqrt{\omega^2 - \Delta_0^2}$ が純虚数になるので、電子場 $\Psi(x)$ を、incoming field で展開する展開係数を $v\tilde{\kappa} = \sqrt{\Delta_0^2 - \omega^2}$ を用いて書き直すと、

$$h(x; \omega) = \frac{1}{v\tilde{D}} \left(-v\tilde{\kappa} + \frac{v\tilde{\kappa}(\Delta(x) - \Delta(\ell))}{v\tilde{\kappa}\tilde{\eta}_+} \tilde{\eta}_+ \right) \cosh \tilde{\kappa}(x - \ell) \\ + \frac{1}{v\tilde{D}} \left(\frac{\Delta(x) + \frac{-(v\tilde{\kappa})^2 + \Delta(x)\Delta(\ell)}{\omega} \tilde{\eta}_+}{\omega + \Delta(\ell)\tilde{\eta}_+} \right) \sinh \tilde{\kappa}(x - \ell) \\ \tilde{h}(x; \omega) = \frac{1}{v\tilde{D}} \left(\frac{-v\tilde{\kappa}\{\Delta(x) - \Delta(0)\} + v\tilde{\kappa}\tilde{\xi}_+}{-v\tilde{\kappa}} \right) \cosh \tilde{\kappa}x \\ - \frac{1}{v\tilde{D}} \left(\frac{\frac{\Delta(x)\Delta(0) - (v\tilde{\kappa})^2}{\omega} + \Delta(x)\tilde{\xi}_+}{\Delta(0) + \omega\tilde{\xi}_+} \right) \sinh \tilde{\kappa}x \\ D\Lambda_-(\omega) = \left[(v\tilde{\kappa}) + \frac{v\tilde{\kappa}}{\omega} \tilde{\eta}_- (\Delta(\ell) - \Delta(0)) - v\tilde{\kappa} \tilde{\xi}_- \tilde{\eta}_- \right] \cosh \tilde{\kappa} \ell \\ + \left[\Delta(0) + \omega(\tilde{\xi}_- + \tilde{\eta}_-) + \frac{-\Delta_0^2 + \Delta(0)\Delta(\ell)}{\omega} \tilde{\eta}_- + \Delta(\ell) \tilde{\xi}_- \tilde{\eta}_- \right] \sinh \tilde{\kappa} \ell$$

となる。ここで、 $D(\omega) = v\tilde{\kappa} \cosh \tilde{\kappa} \ell + \Delta(0) \sinh \tilde{\kappa} \ell$ である。ギャップ内からの寄与を評価するため、新しい積分変数 $\epsilon y = \omega$ (ϵ は微小量) を導入して束縛状態のエネルギー $\omega = 0$ 付近の振る舞いを拡大するのが便利である。この時、 $\tilde{D}\Lambda_-$ は、

$$2\tilde{D}\Lambda_- = \frac{1}{y} \left[\tilde{\xi}_- y^2 + \Delta_0 \left(\frac{s_1}{\epsilon} - \frac{s_2}{\epsilon} \tilde{\xi}_- \tilde{\eta}_- \right) y + 4\Delta_0^2 \tilde{\eta}_- \right] + O(\epsilon) + O(s_1^2/\epsilon) + O(s_2^2/\epsilon), \\ s_1 \equiv 2e^{-2\kappa_0 a}, \quad s_2 \equiv 2e^{-2\kappa_0(\ell - a)}$$

と評価される。ここで、 $[\]$ 中の y^2 と y を含む項は元の積分変数 ω で ℓ に関して指数的に大きい項であり、残りの項は ℓ に関して指数的に小さい項であり、最初の3項と4項目は同じオーダーになる必要がある。さらに、上式で $\epsilon, \frac{s_k^2}{\epsilon} \ll 1$ となれば、後半の3項を無視することができる。そこで、 $s_1 \gg s_2$ ($a < \ell/2$) では、 $\epsilon = s_1$ ととり、 $s_1 \ll s_2$ ($a > \ell/2$) では、

⁴ このことは自明ではない。実際、一様解の場合に (2.27) 左辺の分母 $D\Lambda_-$ 中で ℓ に関して指数的に大きくなった成分は束縛エネルギー近くで小さくなるため、§ 2.6.1 の論法は適用できない。

$\epsilon = s_2$ とる。以下、 $\epsilon = s_1$ の場合を詳細にみていこう。新しい積分変数のもとでは $h(x)$ は以下の様になる。

$$h(x; \omega) = \frac{1}{vD} \begin{pmatrix} \frac{F}{\epsilon} - \Delta_0 G \\ \Delta_0 \tilde{\eta}_+ \end{pmatrix} \cosh \kappa \tilde{x} + \frac{1}{vD} \begin{pmatrix} \frac{F}{\epsilon} + \Delta(x) G \\ \Delta_0 \tilde{\eta}_+ + \epsilon y G \end{pmatrix} \sinh \kappa \tilde{x} + O(\epsilon) + O(s_2^2/\epsilon),$$

$$F \equiv \Delta_0 \frac{\Delta(x) - \Delta_0}{y}, \quad G \equiv 1 - \frac{s_2 \Delta_0}{\epsilon y} \tilde{\eta}_-$$

次に、ソリトンの中心を座標原点にとった新しい変数 $\delta x \equiv x - a$ を導入する。この時、

$$\begin{aligned} & \epsilon |v\tilde{D}|^2 h(\delta x + a - \ell; \omega) \sigma_x h(\delta x + a - \ell; \omega)^* \\ &= (F - \epsilon \Delta_0 G) \Delta_0 \tilde{\eta}_- \frac{4e^{-2\kappa\delta x} + 4s_2 + s_2^2 e^{2\kappa\delta x}}{8s_2} \\ & \quad + (F + \epsilon \Delta(\delta x + a) G) (\Delta_0 \tilde{\eta}_- + \epsilon G^* y) \frac{4e^{-2\kappa\delta x} - 4s_2 + s_2^2 e^{2\kappa\delta x}}{8s_2} \\ & \quad + (2F \Delta_0 \tilde{\eta}_- + \epsilon F G^* y - \epsilon \Delta_0^2 G \tilde{\eta}_- + \epsilon \Delta(\delta x + a) \Delta_0 G \tilde{\eta}_-) \frac{-4e^{-2\kappa\delta x} + s_2^2 e^{2\kappa\delta x}}{8s_2} \\ & \quad + (\text{h.c.}) + O(\epsilon) + O(s_2) \\ &= \frac{\epsilon^2 \Delta(x) y |G|^2}{2s_2} e^{-2\kappa\delta x} + (\text{h.c.}) + O(\epsilon) + O(s_2) \end{aligned}$$

となり、 $\epsilon = s_2$ ($a > \ell/2$) の場合は、 $\ell \gg 1$ で、上式は十分小さい。他方、 $\ell \gg 1$ かつ $\epsilon = s_1$ ($a < \ell/2$) の場合は、 s_1^2/s_2 が小さければ、上式は十分に小さい。つまり、 $\ell \gg 1$ かつ $a > \ell/3$ では、上式は十分に小さい。同様の議論で、右熱浴の電子のうちギャップ内のエネルギーを持つものから、自己無撞着方程式への寄与は、 $s_2^2/s_1 \ll 1$, $s_1 \ll s_2$ の時に無視できる。すなわち、 $a < 2\ell/3$ では、右熱浴の電子は自己無撞着方程式に寄与しない。以上まとめると、 $\frac{\ell}{3} < a < \frac{2\ell}{3}$ の場合には、ギャップ内のエネルギーをもった電子は自己無撞着方程式に寄与しないことが示された。

(B) 連続状態のエネルギーを持つ熱浴電子からの寄与: $|\omega| > |\Delta_0|$

(2.27) 左辺の積分の領域 $|\omega| > |\Delta_0|$ からの寄与を評価しよう。(2.32)、(2.33) の右辺の分母 $D\Lambda_-$ 中で ℓ に関して指数的に小さい成分はエネルギーの値によらず常に無視できる。従って、 $a, (\ell - a) = O(\ell)$ とすれば、 $\Delta(0)$ 、 $\Delta(\ell)$ は、各々、 $-\Delta_0$ 、 Δ_0 で近似しても良い。従って、例えば、Eq. (2.27) の2項目は、

$$\begin{aligned} & \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} d\omega \, v \text{Im} \tilde{\eta}_-(\omega) \frac{\tilde{h}(x; \omega)^\dagger \sigma_x \tilde{h}(x; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} f_R(\omega) \\ &= \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} d\omega \frac{\text{Im} \tilde{\eta}_-(\omega)}{v |D(\omega) \Lambda_-(\omega)|^2} \left\{ S_2(\omega) \sin 2\kappa x + C_2(\omega) \cos 2\kappa x \right. \\ & \quad \left. + \Delta(x) \left(\omega - 2\Delta_0 \text{Re} \tilde{\xi}_-(\omega) + \omega |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2 \right) \right\}, \end{aligned}$$

となる。ここで、 $C_2(\omega)$ 、 $S_2(\omega)$ は次式で定義される。

$$C_2(\omega) = 2 \left\{ \Delta_0 \Delta(x) - (v\kappa)^2 \right\} \text{Re} \tilde{\xi}_-(\omega) - \omega \Delta(x) |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2$$

$$S_2(\omega) = 2v\kappa (\Delta(x) + \Delta_0) \frac{\omega}{\omega} \operatorname{Re} \tilde{\xi}_-(\omega) - \omega v\kappa |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2 + v\kappa \frac{(v\kappa)^2 - \Delta_0^2 - 2\Delta_0 \Delta(x)}{\omega}$$

一様解の時と同様にして、これらを含む項は、Riemann-Lebesgue の定理から無視できることがわかる。 $\Delta(x)$ に比例する項についても同様に評価でき、(2.27) の 2 項目は、

$$\begin{aligned} & \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} d\omega v \operatorname{Im} \tilde{\eta}_-(\omega) \frac{\tilde{h}(x; \omega)^\dagger \sigma_x \tilde{h}(x; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} f_R(\omega) \\ & \sim \Delta(x) \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} d\omega \frac{\operatorname{Im} \tilde{\eta}_-(\omega)}{v\zeta_0(\omega)} \left(\omega - 2\Delta_0 \operatorname{Re} \tilde{\xi}_-(\omega) + \omega |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2 \right) f_R(\omega), \end{aligned}$$

となる。ここで、一様解と同様に、 x が境界から十分離れた場合に Riemann-Lebesgue の定理により 0 になる項は、落とした。この意味の等号を \sim と記してある。ここで、 $1/\zeta_0(\omega)$ は、 $1/|D\Lambda_-(\omega)|^2$ のフーリエ係数の無振動成分で、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \zeta_0(\omega) = v\kappa & \left| \operatorname{Im} \tilde{\xi}_-(\omega) \left\{ \omega + 2\Delta_0 \operatorname{Re} \tilde{\eta}_-(\omega) + \omega |\tilde{\eta}_-(\omega)|^2 \right\} \right. \\ & \left. + \operatorname{Im} \tilde{\eta}_-(\omega) \left\{ \omega - 2\Delta_0 \operatorname{Re} \tilde{\xi}_-(\omega) + \omega |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2 \right\} \right| \end{aligned}$$

(2.27) の 1 項目も同様に評価でき、(2.27) が $\Delta(x)$ に比例し、次の方程式を与えることがわかる。

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= 0 \quad \text{or} \\ \frac{-1}{\lambda} &= \tilde{S}(\Delta_0, V, T_L, T_R), \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{S}(\Delta_0, V, T_L, T_R)$ は、

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\Delta_0, V, T_L, T_R) \equiv & \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} d\omega \left\{ \frac{\operatorname{Im} \tilde{\xi}_-(\omega)}{\zeta_0(\omega)} \left(\omega + 2\Delta_0 \operatorname{Re} \tilde{\eta}_-(\omega) + \omega |\tilde{\eta}_-(\omega)|^2 \right) f_L(\omega) \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{Im} \tilde{\eta}_-(\omega)}{\zeta_0(\omega)} \left(\omega - 2\Delta_0 \operatorname{Re} \tilde{\xi}_-(\omega) + \omega |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2 \right) f_R(\omega) \right\}, \end{aligned}$$

である。以下、一様解の時と同様左右の熱浴の温度は等しく $T \equiv T_L = T_R$ とし、 $\operatorname{Re} \tilde{\xi}_-(\omega) = \operatorname{Re} \tilde{\eta}_-(\omega) = 0$, $\operatorname{Im} \tilde{\xi}_-(\omega) = \operatorname{Im} \tilde{\eta}_-(\omega)$ と仮定する。この時、自己無撞着方程式 (2.27) は

$$\frac{1}{\lambda} = -S(\Delta_0, V, T) \equiv \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \frac{\sinh(\epsilon/T)}{\cosh(\frac{\epsilon V}{2T}) + \cosh(\epsilon/T)}$$

と、一様解と同一になる。非平衡状態におけるソリトン解の詳細については一様解を調べた後、§ 2.9.6 で論じる。

2.6.3 ポーラロン解

本節では同じ振幅をもったソリトン・アンチソリトンが束縛したポーラロンに対応する自己無撞着方程式の解を論じる。逆散乱法に類似した解析から、平衡状態では、

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \Delta_0 - v\kappa_0(t_+(x) - t_-(x)) \\ t_{\pm}(x) &\equiv \tanh \kappa_0(x - a \pm x_0), \quad \tanh 2\kappa_0 x_0 = \frac{v\kappa_0}{\Delta_0},\end{aligned}\tag{2.34}$$

の形のポーラロンのみが自己無撞着方程式を満たすことがわかっている [54, 55]、本節でもこのポーラロンに限って議論する。前節では、ソリトン解の場合、電子のバンドギャップ中に束縛状態 ($\omega = 0$) があっても、これは自己無撞着方程式に寄与しないことを示した。ポーラロン解の場合は、バンド中心から対称に束縛状態が2つ現れ (束縛エネルギーは $\omega = \pm\sqrt{\Delta_0^2 - (v\kappa_0)^2}$)、その近傍のエネルギーを持つ電子は自己無撞着方程式に有限の寄与をする。非平衡状態では、2束縛状態の占有数が平衡状態の場合からずれることにより、スピンレスでもポーラロンが生じることを示す。

(A) エネルギーギャップ内のエネルギーをもつ熱浴電子の寄与: $|\omega| < |\Delta_0|$

ポーラロン解の場合の Green 関数は Appendix C と (2.19)–(2.22) により与えられ、電子場 $\Psi(x)$ を、incoming field で展開する展開係数は、

$$\begin{aligned}vKh_1(x) &= \gamma_- A' f_{--}(x) e^{\tilde{\kappa}\tilde{x}} - \gamma_+ B' f_{-+}(x) e^{-\tilde{\kappa}\tilde{x}} \\ vKh_2(x) &= A' f_{+-}(x) e^{\tilde{\kappa}\tilde{x}} - B' f_{++}(x) e^{-\tilde{\kappa}\tilde{x}} \\ vK\tilde{h}_1(x) &= -C' f_{--}(x) e^{\tilde{\kappa}x} + D' f_{-+}(x) e^{-\tilde{\kappa}x} \\ vK\tilde{h}_2(x) &= -\gamma_+ C' f_{+-}(x) e^{\tilde{\kappa}x} + \gamma_- D' f_{++}(x) e^{-\tilde{\kappa}x} \\ K &\equiv \gamma_+ e^{\tilde{\kappa}\ell} f_{-+}(0) f_{+-}(\ell) - \gamma_- e^{-\tilde{\kappa}\ell} f_{--}(0) f_{++}(\ell)\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\tilde{\kappa} \equiv \sqrt{\Delta_0^2 - \omega^2}/v$ 、 $f_{\sigma\pm}(x) \equiv t_{\sigma}(x) \pm \frac{\tilde{\kappa}}{\kappa_0}$ 、 $\tilde{x} \equiv x - \ell$ 、 $\gamma_{\pm} \equiv \frac{\Delta_0 \pm v\tilde{\kappa}}{\omega}$ であり、 A', B', C', D' は以下で定義される。

$$\begin{aligned}A' &\equiv f_{++}(\ell) + \gamma_+ f_{-+}(\ell) \tilde{\eta}_+ = \left[(w_+ - \epsilon_2) + \gamma_+ (w_+ - \epsilon_4) \tilde{\eta}_+ \right] \\ B' &\equiv f_{+-}(\ell) + \gamma_- f_{--}(\ell) \tilde{\eta}_+ = \left[(w_- - \epsilon_2) + \gamma_- (w_- - \epsilon_4) \tilde{\eta}_+ \right] \\ C' &\equiv f_{-+}(0) + \gamma_- f_{++}(0) \tilde{\xi}_+ = \left[(-w_- + \epsilon_1) + \gamma_- (-w_- + \epsilon_3) \tilde{\eta}_+ \right] \\ D' &\equiv f_{--}(0) + \gamma_+ f_{+-}(0) \tilde{\xi}_+ = \left[(-w_+ + \epsilon_1) + \gamma_+ (-w_+ + \epsilon_3) \tilde{\eta}_+ \right] \\ w_- &\equiv 1 - \frac{\tilde{\kappa}}{\kappa_0}, \quad w_+ \equiv 1 + \frac{\tilde{\kappa}}{\kappa_0}\end{aligned}$$

ここで、 $\epsilon_1 - \epsilon_4$ は

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &\equiv 1 + t_-^0 = s_1 \gamma_-^0 + O(s_1^2), \quad \epsilon_2 \equiv 1 - t_+^\ell = s_2 \gamma_-^0 + O(s_2^2) \\ \epsilon_3 &\equiv 1 + t_+^0 = s_1 \gamma_+^0 + O(s_1^2), \quad \epsilon_4 \equiv 1 - t_-^\ell = s_2 \gamma_+^0 + O(s_2^2) \\ s_1 &\equiv 2e^{-2\kappa_0 a}, \quad s_2 \equiv 2e^{-2\kappa_0(\ell-a)}\end{aligned}$$

与えられ、系が大きい時、微小になる。但し、 $\gamma_{\pm}^0 \equiv \frac{\Delta_0 \pm v\kappa_0}{\omega}$ 。いま、 $\tilde{\kappa} = \kappa_0 + \epsilon_0 y$, ($\epsilon_0 \equiv \exp(-\kappa_0 \ell)$) の変数変換を考え $\epsilon_0 \rightarrow 0$ の極限をとり、この極限で成立する等式を \asymp と記すことにする。 $\omega > 0$ では $\omega \asymp \omega_0$ 、 $\omega < 0$ では $\omega \asymp -\omega_0$ であるので、複号を用いて表記すると、

$$\begin{aligned} A'(\pm\omega) &\asymp 2 \{1 \pm \gamma_{\pm}^0 \tilde{\eta}_{\pm}(\pm\omega_0)\} \\ &\equiv A(\pm\omega_0) \\ B'(\pm\omega) &\asymp - \left[\frac{y}{\kappa_0} \{1 \pm \gamma_{\pm}^0 \tilde{\eta}_{\pm}(\pm\omega_0)\} + \frac{s_2}{\epsilon_0} \{\gamma_{\pm}^0 \pm \tilde{\eta}_{\pm}(\pm\omega_0)\} \right] \epsilon_0 \\ &\equiv -B(\pm\omega_0) \epsilon_0 \end{aligned}$$

さらに、 $\delta x = x - \frac{\ell}{2}$ を有限に保つ時、 $h(x; \omega) \equiv \begin{pmatrix} h_1(x; \omega) \\ h_2(x; \omega) \end{pmatrix}$ は、

$$\begin{aligned} h_1\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) &\asymp \pm \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{vK} \left[\gamma_{\pm}^0 A(\pm\omega_0) f_{--}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) e^{\kappa_0 \delta x} + \gamma_{\pm}^0 B(\pm\omega_0) f_{-+}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) e^{-\kappa_0 \delta x} \right] \\ h_2\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) &\asymp \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{vK} \left[A(\pm\omega_0) f_{+-}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) e^{\kappa_0 \delta x} + B(\pm\omega_0) f_{++}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) e^{-\kappa_0 \delta x} \right] \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} f_{--}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) f_{+-}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) &\approx \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \frac{e^{-2\kappa_0 \delta x}}{c_+ c_-} \\ f_{-+}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) f_{++}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) &\approx \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \frac{e^{2\kappa_0 \delta x}}{c_+ c_-} \\ f_{--}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) f_{++}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) &\approx -\frac{\gamma_{+}^0}{c_+ c_-} \\ f_{-+}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) f_{+-}\left(\frac{\ell}{2} + \delta x\right) &\approx -\frac{\gamma_{-}^0}{c_+ c_-} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} |vK|^2 h_1\left(\frac{\ell}{2} + \delta x; \omega\right) h_2\left(\frac{\ell}{2} + \delta x; \omega\right)^* &\asymp \pm \frac{\epsilon_0 \gamma_{\pm}^0}{c_+ c_-} \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \left| A - \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \gamma_{\pm}^0 B \right|^2 \\ &= \pm \frac{\epsilon_0 \gamma_{\pm}^0}{c_+ c_-} \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \left| \gamma_{\pm}^0 \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} (1 \pm \gamma_{\pm}^0 \tilde{\eta}_{\pm}) \frac{y}{\kappa_0} \right|^2 \end{aligned}$$

を得る。被積分関数の分母 $|\Lambda_{-}(\omega)|^2$ を評価するため前節同様、 $\text{Re} \tilde{\xi}_{-}(\omega) = \text{Re} \tilde{\eta}_{-}(\omega) = 0$, $\text{Im} \tilde{\xi}_{-}(\omega) = \text{Im} \tilde{\eta}_{-}(\omega)$ と仮定する。この時、 $vK \Lambda_{-}(\omega)$ は、

$$\begin{aligned} vK \Lambda_{-}(\omega) &= v e^{\tilde{\kappa} \ell} \left(\tilde{\xi}_{-} \gamma_{-} f_{--}(\ell) + f_{+-}(\ell) \right) \left(\tilde{\xi}_{-} f_{++}(0) + \gamma_{+} f_{-+}(0) \right) \\ &\quad - v e^{-\tilde{\kappa} \ell} \left(\tilde{\xi}_{-} \gamma_{+} f_{-+}(\ell) + f_{++}(\ell) \right) \left(\tilde{\xi}_{-} f_{+-}(0) + \gamma_{-} f_{--}(0) \right) \\ &\equiv v \left(h_{+} e^{\tilde{\kappa} \ell} - h_{-} e^{-\tilde{\kappa} \ell} \right) \end{aligned} \tag{2.35}$$

となるので、 $\tilde{\kappa} = \kappa_0 + \epsilon_0 y$, ($\epsilon_0 \equiv \exp(-\kappa_0 \ell)$) と変数変換し、 $\epsilon_0 \rightarrow 0$ の極限を再び考えると、

$$h_+ e^{\tilde{\kappa} \ell} - h_- e^{-\tilde{\kappa} \ell} \asymp \mp \epsilon_0 \gamma_+^0 (1 \pm \gamma_-^0 \tilde{\xi}_-) \frac{y}{\kappa_0} \left((1 \pm \gamma_-^0 \tilde{\xi}_-) \frac{y}{\kappa_0} + \gamma_-^0 (1 \pm \gamma_+^0 \tilde{\xi}_-) \frac{s_1 + s_2}{\epsilon_0} \right)$$

となる。これを用いれば

$$\frac{h\left(\frac{\ell}{2} + \delta x; \omega\right) \sigma_x h\left(\frac{\ell}{2} + \delta x; \omega\right)^*}{|\Lambda_-(\omega)|^2} \asymp \pm \frac{2\gamma_-^0 \kappa_0^2}{\epsilon_0 v^2 c_+ c_-} \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \frac{1}{\left|1 \pm \gamma_-^0 \tilde{\xi}_-(\pm \omega_0)\right|^2} \frac{1}{\left|y + \gamma_-^0 \kappa_0 \frac{s_1 + s_2}{\epsilon_0} \frac{1 \pm \gamma_+^0 \tilde{\xi}_-(\pm \omega_0)}{1 \pm \gamma_-^0 \tilde{\xi}_-(\pm \omega_0)}\right|^2}$$

が得られ、 $\ell \rightarrow \infty$ (つまり $\epsilon_0 \rightarrow 0$) で、

$$\begin{aligned} I_{BO}^{L>} &\equiv \int_0^{|\Delta_0|} d\omega \operatorname{Im} \xi_-(\omega) \frac{h(\delta x + \frac{\ell}{2}; \omega)^\dagger \sigma_x h(\delta x + \frac{\ell}{2}; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} f_L(\omega) \\ &\approx \int_{\frac{\Delta_0/v - \kappa_0}{\epsilon_0}}^{-\kappa_0/\epsilon_0} \frac{2v^2 \kappa_0 \epsilon_0}{\omega_0} \frac{\gamma_-^0 \kappa_0^2}{\epsilon_0 v^2 c_+ c_-} \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \frac{1}{\left|1 + \gamma_-^0 \tilde{\xi}_-(\omega_0)\right|^2} \frac{1}{\left|y + \gamma_-^0 \kappa_0 \frac{s_1 + s_2}{\epsilon_0} \frac{1 + \gamma_+^0 \tilde{\xi}_-(\omega_0)}{1 + \gamma_-^0 \tilde{\xi}_-(\omega_0)}\right|^2} f_L(\omega_0) \\ &\rightarrow \frac{2v^2 \kappa_0}{\omega_0} \frac{\gamma_-^0 \kappa_0^2}{v^2 c_+ c_-} \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \frac{\pi v \operatorname{Im} \tilde{\xi}_-(\omega_0)}{\left|1 + \gamma_-^0 \tilde{\xi}_-(\omega_0)\right|^2} \left| \operatorname{Im} \left[\gamma_-^0 \kappa_0 \frac{s_1 + s_2}{\epsilon_0} \frac{1 + \gamma_+^0 \tilde{\xi}_-(\omega_0)}{1 + \gamma_-^0 \tilde{\xi}_-(\omega_0)} \right] \right|^{-1} f_L(\omega_0) \\ &= \frac{\pi \kappa_0}{c_+ c_-} \frac{\epsilon_0}{s_1 + s_2} \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} f_L(\omega_0) \end{aligned}$$

が成立する。 $-|\Delta_0|$ から 0 までの積分も同様に評価し、 $2\epsilon_0 = \sqrt{s_1 s_2} (= 2 \exp(-\kappa_0 \ell))$ を用いると、

$$\begin{aligned} I_{BO}^L &\equiv \int_{-|\Delta_0|}^{|\Delta_0|} d\omega \operatorname{Im} \xi_-(\omega) \frac{h(\delta x + \frac{\ell}{2}; \omega)^\dagger \sigma_x h(\delta x + \frac{\ell}{2}; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} f_L(\omega) \\ &= \frac{\kappa_0 \pi s_1}{2(s_1 + s_2)} \frac{1}{c_+ c_-} (f_L(\omega_0) - f_L(-\omega_0)) \end{aligned}$$

同様にして、左熱浴からの寄与は、

$$\begin{aligned} I_{BO}^R &\equiv \int_{-|\Delta_0|}^{|\Delta_0|} d\omega \operatorname{Im} \xi_-(\omega) \frac{\tilde{h}(\delta x + \frac{\ell}{2}; \omega)^\dagger \sigma_x \tilde{h}(\delta x + \frac{\ell}{2}; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} f_R(\omega) \\ &= \frac{\kappa_0 \pi s_2}{2(s_1 + s_2)} \frac{1}{c_+ c_-} (f_R(\omega_0) - f_R(-\omega_0)) \end{aligned}$$

となる。以上まとめれば、(2.27) 左辺の $|\omega| < |\Delta_0|$ からの寄与は、 $T_L = T_R = T = \beta^{-1}$ のとき以下ようになる。

$$\begin{aligned} I_{BO} &\equiv I_{BO}^L + I_{BO}^R \\ &= \frac{\kappa_0 \pi s_1}{2(s_1 + s_2)} \frac{1}{c_+ c_-} (f_L(\omega_0) - f_L(-\omega_0)) + \frac{\kappa_0 \pi s_2}{2(s_1 + s_2)} \frac{1}{c_+ c_-} (f_R(\omega_0) - f_R(-\omega_0)) \\ &= -\frac{\kappa_0 \pi}{2} \frac{1}{c_+ c_-} \frac{\sinh \beta \omega_0}{\cosh \beta \omega_0 + \cosh \frac{\beta e V}{2}} \end{aligned} \tag{2.36}$$

興味深いことに、一様解、ソリトン解の時同様、等温、定電位差の下で生じる非平衡定常状態では、(2.36) は、 s_1, s_2 、従って、ポーラロンの中心位置 a に依存しない。他方、両端の熱浴に温度差がある非平衡定常状態では、(2.36) は、ポーラロンの中心位置 a に依存する。

(B) 連続状態のエネルギーを持つ熱浴電子の寄与: $|\omega| > \Delta_0$

ソリトンの場合と同様に、(2.35) で与えられる $K\Lambda_-$ 中で ℓ に関して指数的に小さい成分はエネルギーの値によらず常に見捨てられる。従って、 $a = O(\ell)$, $(\ell - a) = O(\ell)$ とすれば、 $\Delta(0)$ 、 $\Delta(\ell)$ は、各々、 $-\Delta_0$ 、 Δ_0 で近似できる。この時、電子場 $\Psi(x)$ の incoming field による展開係数は、

$$\begin{aligned}
h_1 &= g_{+-}(x, 0) - \eta_+ \{g_{++}(\ell, \ell)g_{+-}(x, 0) - g_{+-}(\ell, 0)g_{++}(x, \ell)\} \\
&= \frac{1}{vK} \left[\{\gamma f_+(\ell)^* + \tilde{\eta}_+ f_-(\ell)^*\} f_-(x) e^{i\kappa\tilde{x}} - \{\gamma^* f_+(\ell) + \tilde{\eta}_+^* f_-(\ell)\} f_-(x)^* e^{-i\kappa\tilde{x}} \right] \\
&\approx \frac{1}{vK} \left[(\gamma\zeta + \tilde{\eta}_+\zeta) f_-(x) e^{i\kappa\tilde{x}} - (\gamma^*\zeta^* + \tilde{\eta}_+^*\zeta^*) f_-(x)^* e^{-i\kappa\tilde{x}} \right] \\
h_2 &= g_{--}(x, 0) - \eta_+ \{g_{++}(\ell, \ell)g_{--}(x, 0) - g_{+-}(\ell, 0)g_{-+}(x, \ell)\} \\
&= \frac{1}{vK} \left[\{f_+(\ell)^* + \tilde{\eta}_+\gamma^* f_-(\ell)^*\} f_+(x) e^{i\kappa\tilde{x}} - \{f_+(\ell) + \tilde{\eta}_+\gamma f_-(\ell)\} f_+(x)^* e^{-i\kappa\tilde{x}} \right] \\
&\approx \frac{1}{vK} \left[(\zeta + \tilde{\eta}_+\gamma^*\zeta) f_+(x) e^{i\kappa\tilde{x}} - (\zeta^* + \tilde{\eta}_+\gamma\zeta^*) f_+(x)^* e^{-i\kappa\tilde{x}} \right] \\
\tilde{h}_1 &= g_{++}(x, \ell) - \xi_+ \{g_{++}(x, \ell)g_{--}(0, 0) - g_{+-}(0, \ell)g_{-+}(x, 0)\} \\
&= \frac{1}{vK} \left[\left\{ -f_-(0)^* + \gamma f_+(0)^* \tilde{\xi}_+ \right\} f_-(x) e^{i\kappa x} + \left\{ f_-(0) - \gamma^* f_+(0) \tilde{\xi}_+ \right\} f_-(x)^* e^{-i\kappa x} \right] \\
&\approx \frac{1}{vK} \left[\left(\zeta^* + \gamma\zeta^* \tilde{\xi}_+ \right) f_-(x) e^{i\kappa x} - \left(\zeta + \gamma^*\zeta \tilde{\xi}_+ \right) f_-(x)^* e^{-i\kappa x} \right] \\
\tilde{h}_2 &= g_{-+}(x, \ell) - \xi_+ \{g_{--}(0, 0)g_{-+}(x, \ell) - g_{+-}(0, \ell)g_{--}(x, 0)\} \\
&= \frac{1}{vK} \left[-\left\{ \gamma^* f_-(0)^* + f_+(0)^* \tilde{\xi}_+ \right\} f_+(x) e^{i\kappa x} + \left(\gamma f_-(0) + f_+(0) \tilde{\xi}_+ \right) f_+(x)^* e^{-i\kappa x} \right] \\
&\approx \frac{1}{vK} \left[\left(\gamma^*\zeta^* + \zeta^* \tilde{\xi}_+ \right) f_+(x) e^{i\kappa x} - \left(\gamma\zeta + \zeta \tilde{\xi}_+ \right) f_+(x)^* e^{-i\kappa x} \right] \\
K &\equiv -\gamma^*\zeta^{*2} e^{i\kappa\ell} + \gamma\zeta^2 e^{-i\kappa\ell}
\end{aligned}$$

となる。但し、 $f_\sigma(x) = t_\sigma - i\frac{\kappa}{\kappa_0}$ 、 $v\kappa = \sqrt{\omega^2 - \Delta_0^2}$ 、 $\gamma = \frac{\Delta_0 - iv\kappa}{\omega_0}$ 、 $\zeta = 1 + i\frac{\kappa}{\kappa_0}$ である。このとき、(2.27) の 2 項目は、

$$\begin{aligned}
I_{SC}^R &\equiv \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} d\omega \, v \text{Im} \tilde{\eta}_-(\omega) \frac{\tilde{h}(x; \omega)^\dagger \sigma_x \tilde{h}(x; \omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} f_R(\omega) \\
&\sim \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{4v \text{Im} \tilde{\eta}_-(\omega) |\zeta|^2 \left(1 + \frac{2\Delta_0}{\omega} \text{Re} \tilde{\xi}_- + |\tilde{\xi}_-|^2 \right) \text{Re} (\gamma f_-(x) f_+(x)^*)}{|vK\Lambda_-(\omega)|^2} f_R(\omega) \\
&= \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{4v \text{Im} \tilde{\eta}_-(\omega) |\zeta|^2 \left(1 + \frac{2\Delta_0}{\omega} \text{Re} \tilde{\xi}_- + |\tilde{\xi}_-|^2 \right) (\omega^2 \Delta(x) - \omega_0^2 \Delta_0)}{|vK\Lambda_-(\omega)|^2 \omega (v\kappa_0)^2} f_R(\omega)
\end{aligned}$$

となる。ここで、一様解、ソリトン解と同様に、 x が境界から十分離れた場合に Riemann-Lebesgue の定理から 0 になる項は、省略し、この意味の等号を \sim と記してある。さらに、

$1/|vK\Lambda_-(\omega)|^2$ をフーリエ展開し、一様、ソリトン解と同様に評価すれば、

$$I_{SC}^R \sim \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} d\omega \frac{4v\text{Im}\tilde{\eta}_-(\omega)|\zeta|^2 \left(1 + \frac{2\Delta_0}{\omega}\text{Re}\tilde{\xi}_- + |\tilde{\xi}_-|^2\right) (\omega^2\Delta(x) - \omega_0^2\Delta_0)}{\zeta_0\omega(v\kappa_0)^2} f_R(\omega)$$

を得る。ここで、 $1/\zeta_0(\omega)$ は、 ζ_0 は $1/|vK\Lambda_-(\omega)|^2$ のフーリエ係数の無振動成分で、

$$\begin{aligned} \zeta_0(\omega) = & \frac{4v^3\kappa}{|\omega|} |\zeta|^4 \left| \text{Im}\tilde{\xi}_-(\omega) \left\{ 1 + \frac{2\Delta_0}{\omega}\text{Re}\tilde{\eta}_-(\omega) + |\tilde{\eta}_-(\omega)|^2 \right\} \right. \\ & \left. + \text{Im}\tilde{\eta}_-(\omega) \left\{ 1 + 2\frac{\Delta_0}{\omega}\text{Re}\tilde{\xi}_-(\omega) + |\tilde{\xi}_-(\omega)|^2 \right\} \right| \end{aligned}$$

で与えられる。左右の熱浴の温度が等しく ($\beta^{-1} \equiv T_L = T_R$)、 $\text{Re}\tilde{\xi}_-(\omega) = \text{Re}\tilde{\eta}_-(\omega) = 0$ 、 $\text{Im}\tilde{\xi}_-(\omega) = \text{Im}\tilde{\eta}_-(\omega)$ の場合、自己無撞着方程式 (2.27) 左辺の $|\omega| > |\Delta_0|$ のエネルギーを持つ左熱浴電子からの寄与は、

$$\begin{aligned} I_{SC}^R & \sim \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{\omega^2\Delta(x) - \omega_0^2\Delta_0}{2v^2\kappa(\omega^2 - \omega_0^2)} (f_L(\omega) - f_L(-\omega)) \\ & = - \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{\omega^2\Delta(x) - \omega_0^2\Delta_0}{2v^2\kappa(\omega^2 - \omega_0^2)} \frac{\sinh\beta\omega}{\cosh\beta\omega + \cosh\frac{\beta eV}{2}} d\omega, \end{aligned}$$

となる。同様にして、左熱浴からの寄与は、

$$\begin{aligned} I_{SC}^L & \equiv \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} d\omega v\text{Im}\tilde{\xi}_-(\omega) \frac{h(x;\omega)^\dagger \sigma_x h(x;\omega)}{|\Lambda_-(\omega)|^2} f_L(\omega) \\ & \sim - \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{\omega^2\Delta(x) - \omega_0^2\Delta_0}{2v^2\kappa(\omega^2 - \omega_0^2)} \frac{\sinh\beta\omega}{\cosh\beta\omega + \cosh\frac{\beta eV}{2}} d\omega \end{aligned}$$

となる。

(C) 自己無撞着方程式

$I_{BO} = I_{BO}^L + I_{BO}^R$ 、 $I_{SC} = I_{SC}^L + I_{SC}^R$ とおくと、自己無撞着方程式 (2.27) は、

$$I_{SC} + I_{BO} = -\frac{\Delta(\delta x + \frac{\ell}{2})}{v\lambda}$$

となる。ここで、 ℓ が十分大きいと、

$$\begin{aligned} I_{BO} & = -\frac{\kappa_0\pi}{2} \frac{1}{c_+c_-} \frac{\sinh\beta\omega_0}{\cosh\beta\omega_0 + \cosh\frac{\beta eV}{2}} \\ I_{SC} & = - \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{\omega^2\Delta(\delta x + \frac{\ell}{2}) - \omega_0^2\Delta_0}{v^2\kappa(\omega^2 - \omega_0^2)} \frac{\sinh\beta\omega}{\cosh\beta\omega + \cosh\frac{\beta eV}{2}} d\omega \end{aligned}$$

となるので、(2.27) は、

$$\int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{\omega^2\Delta(\delta x + \frac{\ell}{2}) - \omega_0^2\Delta_0}{v^2\kappa(\omega^2 - \omega_0^2)} \frac{\sinh\beta\omega}{\cosh\beta\omega + \cosh\frac{\beta eV}{2}} d\omega + \frac{\kappa_0\pi}{2} \frac{1}{c_+c_-} \frac{\sinh\beta\omega_0}{\cosh\beta\omega_0 + \cosh\frac{\beta eV}{2}} = \frac{\Delta(\delta x + \frac{\ell}{2})}{v\lambda}$$

となる。従って、以下の連立方程式が得られる。

$$\int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} d\omega \frac{\omega_B}{v\kappa(\omega^2 - \omega_B^2)} \frac{\sinh \beta\omega}{\cosh \beta\omega + \cosh \frac{\beta eV}{2}} = \frac{\pi}{2v\kappa_0} \frac{\sinh \beta\omega_B}{\cosh \beta\omega_B + \cosh \frac{\beta eV}{2}}$$

$$\int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta_0^2}} \frac{\sinh \beta\omega}{\cosh \beta\omega + \cosh \frac{\beta eV}{2}} = \frac{1}{\lambda}$$

非平衡状態におけるポーラロン解については、一様解を調べた後、§ 2.9.7 で詳しく論じる。

2.7 電流

系に流れる電流は、(2.17) で与えられる。この値は、 ℓ が十分大きい時には自己無撞着方程式の場合と同様の評価ができて、

$$J \sim -\frac{2e}{\pi} \int_{|\Delta_0| < |\omega| < \omega_c} d\omega (v\kappa)^2 \frac{\text{Im}\tilde{\eta}_-(\omega) \text{Im}\tilde{\xi}_-(\omega)}{\zeta_0(\omega)} (f_L(\omega) - f_R(\omega)) . \quad (2.37)$$

となる。これは、一様解、ソリトン解、ポーラロン解に共通である。すなわち、ソリトン、ポーラロンの時に存在する電子の束縛状態は、電流に寄与しない。1 例として、ポーラロンの場合に、ギャップ内の電子の電気伝導への寄与が指数的に小さいことを示す。ギャップ内の電子の電流への寄与は、

$$2ev \int_{-|\Delta_0|}^{|\Delta_0|} d\omega d\mathbf{k} \frac{\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) |v_{\mathbf{k}}|^2}{|\Lambda_-(\omega)|^2} \left[\text{Im}(h_2^* h_1) f_L(\omega) + \text{Im}(\tilde{h}_2^* \tilde{h}_1) f_R(\omega) \right]$$

$$= 2ev \int_{-|\Delta_0|}^{|\Delta_0|} d\omega \frac{\eta_-(\omega)}{\pi |\Lambda_-(\omega)|^2} \left[\text{Im}(h_2^* h_1) f_L(\omega) + \text{Im}(\tilde{h}_2^* \tilde{h}_1) f_R(\omega) \right] ,$$

但し、 $h(x; \omega) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix}$ である。上式の被積分関数のうち例えば、一項目の主要項は、

$$|vK|^2 h_1(x) h_2(x)^* \asymp \pm \frac{\epsilon_0 \gamma_-^0}{c_+ c_-} \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \left| A - \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \gamma_+^0 B \right|^2$$

となり、明らかに 0 である。同様なことが二項目に対しても言えるため、直ちにギャップ内のエネルギーを持つ電子が電気伝導に寄与しないことがいえる。なお、上式の \asymp は、§ 2.6.3 同様、 $\kappa = \kappa_0 + \epsilon_0 y$, ($\epsilon_0 \equiv \exp(-\kappa_0 \ell)$) の変数変換を考え $\epsilon_0 \rightarrow 0$ の極限をとった際に成立する等号であり、上の符号は $\omega > 0$ 、下の符号は $\omega < 0$ の場合を表す。

本論文では考察しないが、動いているソリトンやポーラロンといったトポロジカルな欠陥は電荷を運ぶ。上記の結果より、トポロジカル欠陥が電流を運ぶ際にバックグラウンドで流れる電流は変わらないことが予想され、電流の総量は、一様相で流れる電流と欠陥が運ぶ電流を単純に足し合わせれば良いと考えられる。

電流はフェルミエネルギー近傍の電子が主体となって運ぶので、電流の計算では、 $\tilde{\xi}_-(\omega) = \tilde{\eta}_-(\omega) = i\Gamma/v$ と近似する。この近似の下では電流は、

$$J = \frac{G_0}{e} \int_{|\Delta_0| < |\epsilon| < \omega_c} d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}}{|\epsilon|} [f_R(\epsilon) - f_L(\epsilon)] , \quad (2.38)$$

となる。ここで、 $G_0 = e^2 v \Gamma / \{\pi(v^2 + \Gamma^2)\}$ は、熱浴との接触に起因する無秩序相におけるコンダクタンスである。

2.8 相の安定性

本節では、秩序/無秩序相の安定性について論じる。NESS では平衡状態の自由エネルギーに相当する概念がないため、相の安定性を決定する一般の方法が存在しない。そこで、断熱的な時間発展を仮定し運動方程式の線形安定性を調べる。

平衡近傍では、通常、自由エネルギーが減少するように緩和過程が駆動される。従って、自由エネルギー最小という安定条件は、緩和ダイナミクスの安定条件と読み替えることができる。この見方を外挿すると NESS の安定性は平均場の運動方程式の安定性で論じることが可能と考えられる。運動方程式を導くには、本来は、秩序変数の平均が $\tilde{\Delta}(t)$ になるという仮定の下で時間に依存する電子系の Green 関数を求め自己無撞着条件を解かねばならない。しかし、通常、電子応答は格子応答に比べて著しく速いので、電子系は各瞬間の秩序変数の平均値 $\tilde{\Delta}(t)$ の下で作られる仮想的な定常状態にあるものとし、格子に働く力を $\pi v \lambda \langle \Psi^\dagger(x) \sigma_x \Psi(x) \rangle_\infty$ から計算すればよい（断熱近似）と考えられる。具体的には、(2.31) の $S(\Delta_0, V, T_L, T_R)$ を $S(\tilde{\Delta}, V, T_L, T_R)$ でおきかえれば良い⁵。

以下、一様解の場合に詳しく説明しよう。上記の近似の下では秩序変数の平均値の時間発展方程式は、

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Delta}(t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \left\{ 1 + \lambda \tilde{S}(\tilde{\Delta}(t), V, T_L, T_R) \right\} \tilde{\Delta}(t) ,$$

となる。まず、無秩序相 $\Delta_0 = 0$ の安定性を考えよう。線形化方程式は

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Delta}(t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \left\{ 1 + \lambda \tilde{S}(0, V, T_L, T_R) \right\} \tilde{\Delta}(t) ,$$

となるので、

$$\chi_N \equiv 1 + \lambda \tilde{S}(0, V, T_L, T_R) , \quad (2.39)$$

χ_N が正の時に $\Delta_0 = 0$ は安定である。次に秩序相 $\Delta_0 \neq 0$ の安定性を考えよう。このとき、定電圧の場合と、定電流の場合を区別する必要がある。定電圧の場合は、 $\delta \tilde{\Delta}(t) = \tilde{\Delta}(t) - \Delta_0$ に関する線形化方程式は、

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Delta}(t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \lambda \Delta_0 \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Delta_0} \right)_V \delta \tilde{\Delta}(t) ,$$

であり、

$$\chi_V(\Delta_0) = \lambda \Delta_0 \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Delta_0} \right)_V > 0 , \quad (2.40)$$

⁵ この安定性は、

- 1) 仮想的な外力をかけて格子をあらかじめ与えた値 $\tilde{\Delta}(t)$ に固定して定常状態を作る。
 - 2) 外力を短い間 0 にして微小距離格子を動かし、また仮想的な外力でピン止めし定常状態を作る。
- という作業を繰り返した時に最終的に系が元の定常状態に戻るかどうかという安定性を見なすこともできる。

の時に秩序相は安定となる。他方、定電流の場合の線形化方程式は、

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Delta}(t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \lambda \Delta_0 \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Delta_0} \right)_J \delta \tilde{\Delta}(t),$$

となる。右辺の微分係数を得るには、電圧を電流および秩序変数の平均で書き直した後に S を電流一定条件のもと秩序変数で微分すればよい。よって、定電流の場合、秩序相は、

$$\begin{aligned} \chi_I(\Delta_0) &= \lambda \Delta_0 \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Delta_0} \right)_J \\ &= \lambda \Delta_0 \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Delta_0} \right)_V - \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial V} \right)_{\Delta_0} \left(\frac{\partial J}{\partial \Delta_0} \right)_V / \left(\frac{\partial J}{\partial V} \right)_{\Delta_0} \right\} > 0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

の時に安定となる。Appendix D で示すように、 $\chi_I(\Delta_0) \geq \chi_V(\Delta_0)$ (等号は $\Delta_0 = 0$ で成立) が成立するので、定電圧で安定な秩序相は、常に、定電流でも安定である。ソリトン解については $\tilde{\Delta} = \pm \Delta_0$ という異なる一様解を連続的につなぐ解であるため、一様解が安定であれば安定になり、上記の条件がそのままあてはまる (ポーラロン解については、振幅の安定性についてより詳しい議論が必要である)。

2.9 非平衡 Peierls 転移

本節では、§ 2.6 で導出された自己無撞着方程式を整理し (§ 2.9.1)、一様相について、安定性、相図、及び電気伝導を絶対零度の場合 (§ 2.9.2)、有限温度で電圧駆動の場合 (§ 2.9.3)、有限温度で電流駆動の場合 (§ 2.9.4) について調べ、その後、ソリトン解 (§ 2.9.6)、ポーラロン解 (§ 2.9.7) について論じる。

2.9.1 自己無撞着方程式の解析

§ 2.6.1–§ 2.6.3 の結果をまとめる。 $\text{Re} \tilde{\xi}_-(\omega) = \text{Re} \tilde{\eta}_-(\omega) = 0$, $\text{Im} \tilde{\xi}_-(\omega) = \text{Im} \tilde{\eta}_-(\omega)$ と仮定すると、 $T \equiv T_L = T_R$ の時、自己無撞着方程式 (2.27) は、

$$\frac{1}{\lambda} = -S(\Delta_0, V, T) = \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \frac{\sinh(\epsilon/T)}{\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh(\epsilon/T)}, \quad (2.42)$$

となった。さらに、ポーラロンの場合は、上式の解のうち

$$\int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} d\omega \frac{\omega_B}{v\kappa(\omega^2 - \omega_B^2)} \frac{\sinh \beta\omega}{\cosh \beta\omega + \cosh \frac{\beta eV}{2}} = \frac{\pi}{2v\kappa_B} \frac{\sinh \beta\omega_B}{\cosh \beta\omega_B + \cosh \frac{\beta eV}{2}}, \quad (2.43)$$

かつ $\pm\omega_B = \sqrt{\Delta_0^2 - v\kappa_0^2}$ を満たす Δ_0 のみが解となる。

他方、電流はフェルミ面近傍の電子によって運ばれるので、電流の計算では自己無撞着方程式の時より強い仮定 $\tilde{\xi}_-(\omega) = \tilde{\eta}_-(\omega) = i\Gamma/v$ を課し、

$$J = \frac{2G_0}{e} \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}}{\epsilon} \frac{\sinh(\frac{eV}{2T})}{\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh(\frac{\epsilon}{T})} \quad (2.44)$$

を得た。但し、 G_0 は

$$G_0 = \frac{e^2}{\pi} \frac{v\Gamma}{v^2 + \Gamma^2} .$$

なお、電流 (2.44) は、 $\Delta_0 = 0$ の時は簡単に積分できて

$$\begin{aligned} J &= \frac{2G_0}{e} \int_0^{\omega_c} d\omega \frac{\sinh(\frac{eV}{2T})}{\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh(\frac{\epsilon}{T})} \\ &= \frac{2G_0}{e\beta} \left[\log \left| \frac{\cosh\left(\frac{\omega+eV/2}{2T}\right)}{\cosh\left(\frac{\omega-eV/2}{2T}\right)} \right| \right]_0^{\omega_c} , \end{aligned}$$

となる。従って、 $\exp\{-(2\omega_c - e|V|)/(2T)\}$ のオーダーの項を無視すれば、

$$J = G_0 V ,$$

となり電圧と電流は比例する。但し、オームの法則とは異なり、コンダクタンスが系の長さ ℓ に依存しない。これは弾道型伝導を表し、電場でなく電圧が電気伝導をコントロールする。次の § 2.9.2、§ 2.9.3、§ 2.9.4 では、各々、絶対零度、有限温度の際の自己無撞着方程式、非線形伝導を (2.42)、(2.44) をもとに調べる。

2.9.2 絶対零度における非平衡 Peierls 転移

本節では、絶対零度における秩序変数、非線形伝導について調べる。絶対零度では θ をステップ関数とするとき

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sinh(y/T)}{\cosh(y/T) + \cosh(x/T)} = \text{sgn}(y)\theta(|y| - |x|)$$

が成立するので、 $S(\Delta_0, V, T)$ 、電流は、次の様に与えられる。

$$S(\Delta_0, V, 0) = - \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \theta\left(\epsilon - \left|\frac{eV}{2}\right|\right) \quad (2.45)$$

$$J = \frac{2G_0}{e} \text{sgn}(V) \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}}{\epsilon} \theta\left(\left|\frac{eV}{2}\right| - \epsilon\right)$$

まず、無秩序相 $\Delta_0 = 0$ を考えよう。この相の安定性指数 χ_N は、次のようになる。

$$\chi_N = 1 + \lambda S(0, V, 0) = \lambda \ln \frac{|V|}{V_{10}}$$

但し、 $V_{10} = \frac{2\omega_c}{e} \exp(-\frac{1}{\lambda})$ である。従って、無秩序相は $|V| > V_{10}$ で安定 ($\chi_N > 0$) で、 $|V| < V_{10}$ で不安定 ($\chi_N < 0$) となる。また、前節で示したように電流は

$$J = G_0 V$$

である。次に秩序相について考えよう。 $|\Delta_0| \geq |eV|/2$ では (2.45) は

$$S(\Delta_0, V, 0) = - \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} = - \cosh^{-1} \frac{\omega_c}{|\Delta_0|}$$

であり、(2.42) は、 $|V| \leq V_{20} \equiv 2\Delta_c/e$ の時に電圧に依存しない非自明解

$$|\Delta_0| = \frac{\omega_c}{\cosh \frac{1}{\lambda}} \equiv \Delta_c$$

を持つ。この相の定電圧下での安定指数 χ_V は

$$\chi_V = \lambda \Delta_0 \left(\frac{\partial S}{\partial \Delta_0} \right)_V = \frac{\lambda \omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 - \Delta_0^2}} > 0$$

となるので、この相は安定である。さらに、Appendix D で示すように、秩序相では $\chi_I > \chi_V$ となるので、この相は電流駆動でも安定である。この時に系に電流は流れない: $J = 0$ 。これは以下のように説明できる; $|\Delta_0| = \Delta_c$ の秩序相では、電子のエネルギースペクトルに幅 $2\Delta_c$ のギャップが生じる。 $V = 0$ ではフェルミエネルギーはギャップ中心にあるので、 $|eV|/2 \leq |\Delta_0|$ をみたす電圧をかけたのではギャップ外にキャリアが存在しないため絶縁体になるのである。

次に、 $|\Delta_0| < |eV|/2$ を満たす (2.42) の非自明解を考えよう。 $|\Delta_0| < |eV|/2$ の時 $S(\Delta_0, V, 0)$ は、

$$S(\Delta_0, V, 0) = - \int_{|eV|/2}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} = - \left\{ \cosh^{-1} \frac{\omega_c}{|\Delta_0|} - \cosh^{-1} \frac{|eV|}{2|\Delta_0|} \right\}$$

であり、(2.42) は $V_{10} \leq |V| \leq V_{20}$ で次の非自明解を持つ。

$$|\Delta_0| = \Delta_c \sqrt{\frac{|V| - V_{10}}{V_{20} - V_{10}} \left\{ \frac{|V|}{V_{20}} + \frac{V_{10}(V_{20} - |V|)}{V_{20}(V_{20} - V_{10})} \right\}} \equiv \Delta_1(\lambda, V) (< \Delta_c) \quad (2.46)$$

$|\Delta_0| < |eV|/2 < \omega_c$ より、この相の定電圧の場合の安定指数 χ_V は、

$$\chi_V = \lambda \Delta_0 \left(\frac{\partial S}{\partial \Delta_0} \right)_V = \frac{\lambda \omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 - |\Delta_0|^2}} - \frac{\lambda |eV|}{2\sqrt{(eV)^2/4 - |\Delta_0|^2}} < 0,$$

となり、この相は定電圧の場合に不安定になる。他方、定電流の場合には Appendix D に示す様に、 $\chi_I > 0$ となるので、この相は定電流下では安定となる。なお、電流は、

$$\begin{aligned} J &= \frac{2G_0}{e} \text{sgn}(V) \int_{|\Delta_0|}^{|eV|/2} d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}}{\epsilon} \\ &= \frac{2G_0}{e} |\Delta_0| \text{sgn}(V) \left\{ \sqrt{\left(\frac{eV}{2\Delta_0} \right)^2 - 1} - \tan^{-1} \sqrt{\left(\frac{eV}{2\Delta_0} \right)^2 - 1} \right\} \equiv J_2(\lambda, V) \end{aligned}$$

で与えられる。これらの結果を図 2.1、図 2.2 に示す。なお、(2.42)、(2.43) は、 $|\Delta_0|, |V|$ のみに依存する関数であり、(2.44) は V に関して奇関数なので、本論文を通してグラフは $V > 0, J > 0, \Delta_0 > 0$ で描く。

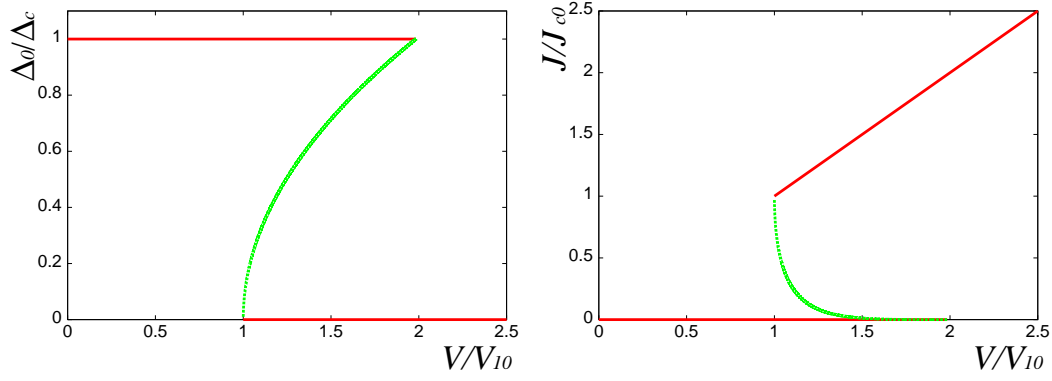


図 2.1: 左：絶対零度における秩序変数の電圧依存性。右：絶対零度における電流の電圧依存性。赤線は、定電圧、定電流の時に安定な相を、緑線は定電流の時のみ安定な相を表す。

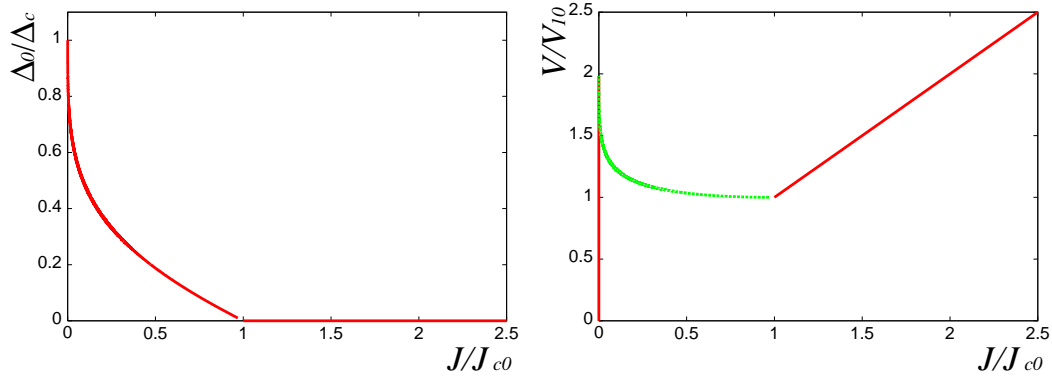


図 2.2: 左：絶対零度における秩序変数の電流依存性。右：絶対零度における電圧の電流依存性。電流駆動では全ての秩序相が安定である。 $(J, |\Delta_0|) = (0, \Delta_c)$ は、 $V_{10} \leq |V| \leq V_{20}$ の絶縁相に当たることを注意しておく。

電圧駆動の結果をまとめれば、

- $|V| < V_{10}$ の時
秩序相 $|\Delta_0| = \Delta_c$ のみが安定である。なお、閾電圧 V_{10} は λ が大きい時、 $eV_{10} = 2\omega_c \exp(\frac{1}{\lambda}) \approx \omega_c / \cosh \frac{1}{\lambda} = \Delta_c$ と、エネルギーギャップ $2\Delta_c$ の約半分になる。
- $V_{10} < |V| < V_{20}$ の時
無秩序相 $\Delta_0 = 0$ と、秩序相 $|\Delta_0| = \Delta_c$ が安定になる。よって、1 次相転移が起こりうる。さらに、この 2 つの相の間をつなぐ不安定相 $|\Delta_0| = \Delta_1(\lambda, V) < \Delta_c$ (図 2.1 の緑線) が存在する。
- $|V| > V_{20}$ の時
無秩序相 $\Delta_0 = 0$ のみが安定である。閾電圧は $eV_{20} \equiv 2\Delta_c$ と、エネルギーギャップに

相当する。つまり、零バイアス時のバンドギャップ程度の電圧をかけると秩序が消失する。

電圧駆動の場合、秩序変数は電圧の多価関数であったのに対し、電流駆動の場合には $J = 0$ を除き秩序変数は、電流の 1 価関数であり、各電流毎の相は安定になる。つまり、

- $|J| = 0$ の時
 $|\Delta_0| = \Delta_c$ となる。 V は $0 \leq |V| < V_{20}$ の任意の値が可能。
- $0 < |J| \leq J_{c0} \equiv G_0 V_{10}$ の時
 $|\Delta_0| = \Delta_1(\lambda, V)$ となる。但し、 V は、 $J_2(\lambda, V) = J$ を逆に解いたものである。秩序相のみが安定で、 $|\Delta_0|$ は $|J| = J_{c0}$ で 0 となる $|J|$ の単調減少関数である。他方、 $|V|$ は、 $|J|$ の減少関数となり、微分伝導度は負となる (c.f. 図 2.2 右)。
- $|J| > J_{c0}$ の時
 $\Delta_0 = 0$ 、つまり、無秩序相が安定になる。この時、 $V = J/G_0$ である。

絶対零度では温度による励起がないため、 $0 < |V| \leq V_{20}$ では系が完全な絶縁体になり、 $J = 0$ となる。次節で示すように有限温度では立ち上がりは急だが電圧は電流の 1 価関数となる。また、ギャップは電流の単調減少関数で、特に、閾電流 J_{c0} 付近で秩序変数は電流に対して線形に 0 になってゆく。

$$|\Delta_0| \approx \frac{2|\Delta_0|}{\pi} \frac{J_{c0} - |J|}{G_0 V_{20}}, \quad (|J| \leq J_{c0})$$

これらの性質に注目すると負の微分伝導度の出現は直感的には以下のように理解できる: 熱浴間の電圧が 0 の時には系はエネルギーギャップ $2\Delta_c$ の絶縁体となっており電流は流れない。ギャップが有限であるため低電圧では電子は励起されず、系は絶縁体に保たれる。電流が流れ始める時、ギャップより大きなエネルギーをもつ電子が励起されており電圧は零バイアスの時のギャップと同程度の大きさをもつ ($|V| \sim 2\Delta_c/e$)。同時に、ギャップは電流によって抑制されるため、電流が増加するとギャップ $2|\Delta_0|$ も減少し、それに応じて電子を励起し電流を流すのに必要となる電圧 $|V| \sim 2|\Delta_0|/e$ も減少する。このようにして、負の微分伝導度が生じるのである。

2.9.3 有限温度における非平衡 Peierls 転移 (電圧駆動)

本節では、有限温度の系が一定の電圧で駆動される場合について秩序変数、非線形伝導を調べる。

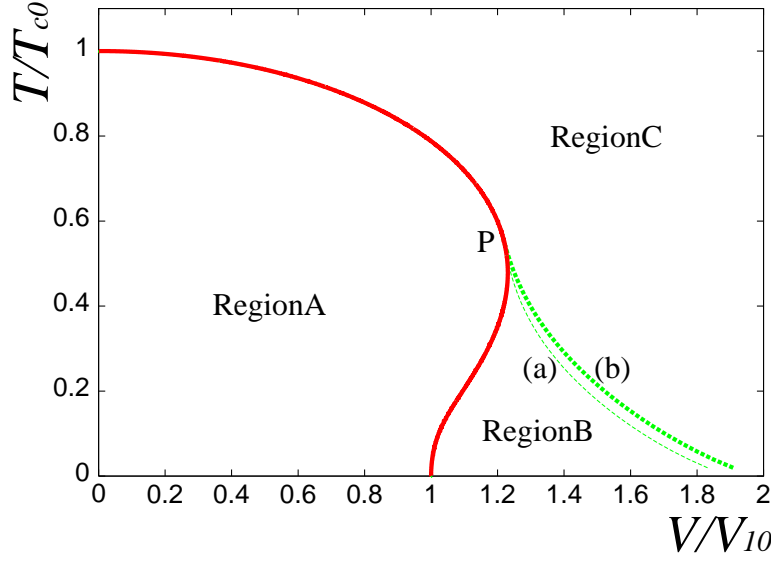


図 2.3: 電圧駆動時の相図。領域 A では、ただ 1 つのの秩序相のみが安定である。領域 B では、安定な秩序相と不安定な秩序相が 1 つずつ存在し、無秩序相は安定になる。領域 C では、無秩序相のみが安定である。実線は、2 次の相転移線を表し、破線は、1 次の相転移線を表す。比較のため、(a) $\lambda = 4.8$ と (b) $\lambda = 3.0$ の場合を示してある（2 次相転移線は、閾値でスケールするとほとんど λ によらない）。

(A) 相図

まず、電圧、温度をパラメータとした相図について調べる。このとき、絶対零度の時同様、(A) 安定な秩序相のみが存在する領域、(B) 準安定な秩序相、無秩序相、及び不安定な秩序相が存在する領域、(C) 無秩序相のみが存在する領域の 3 領域に分けられる (図 2.3)。図中の点 $P(V^*, T^*)$ は、領域 A、B、C の 3 重点である。

領域 A の境界線は、無秩序相が不安定化する境界である。つまり、この境界線を $|V| = V_1(T)$ と表すと、無秩序相は $|V| < V_1(T)$ では不安定で、 $|V| > V_1(T)$ では、安定となる。この境界は、電圧 $|V|$ を増す時 $T < T^*$ では不安定秩序相が $\Delta_0 = 0$ から生じ、 $T > T^*$ では安定秩序相が $\Delta_0 = 0$ となり消失する境界線でもあるので、次式で与えられる。

$$0 = \frac{\chi_N}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} + S(0, V, T) = \frac{1}{\lambda} - \int_0^{\omega_c/T} \frac{d\epsilon}{\epsilon} \frac{\sinh \epsilon}{\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh \epsilon} \quad (2.47)$$

ここで、 χ_N は無秩序相の安定指数である。部分積分を実行すると、 $1/\lambda = -\log(eV_{10}/2\omega_c)$ より、

$$\log \frac{eV_{10}}{2\omega_c} = -\log \frac{\omega_c}{T} \frac{\sinh(\frac{\omega_c}{T})}{\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh(\frac{\omega_c}{T})} + \int_0^{\omega_c/T} d\epsilon \log \epsilon \frac{\cosh(\frac{eV}{2T}) \cosh \epsilon + 1}{(\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh \epsilon)^2},$$

が得られ、さらに、 $\exp\{-(2\omega_c - e|V|)/(2T)\}$ のオーダーの項を無視すれば境界を決定す

る式は次のようになる。

$$\log \frac{eV_{10}}{2T} = \int_0^\infty d\epsilon \log \epsilon \frac{\cosh(\frac{eV}{2T}) \cosh \epsilon + 1}{(\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh \epsilon)^2} \equiv \phi\left(\frac{eV}{2T}\right) \quad (2.48)$$

特に、 $V = 0$ の時は (2.48) は簡単に積分できて

$$\log \frac{eV_{10}}{2T} = \int_0^\infty d\epsilon \frac{\log \epsilon}{1 + \cosh \epsilon} = -\log \frac{2e^\gamma}{\pi} \quad \text{or} \quad T = T_{c0} \equiv \frac{e^\gamma}{\pi} eV_{10},$$

となる (γ は Euler 定数)。つまり、ゼロバイアスでの転移温度は T_{c0} で与えられる。これを用いると (2.48)、境界 $|V| = V_1(T)$ の方程式は、

$$\log \left(\frac{\pi}{2e^\gamma} \frac{T_{c0}}{T} \right) = \phi \left(\frac{\pi}{2e^\gamma} \frac{V}{V_{10}} \frac{T_{c0}}{T} \right), \quad (2.49)$$

となる。すなわち、領域 A の境界は電圧、温度を V_{10} 及び T_{c0} でスケールすると結合定数 λ によらなくなる (図 2.3 の実線)。そこで今後は $V_1(T)$ を、第 1 閾電圧と呼ぶことにする。

(2.49) から低電圧領域では電圧により転移温度が下がること、低温では温度により第 1 閾電圧が上昇することがわかる。実際に、低電圧領域、つまり、 $e|V| \ll T$ では、 $\phi'(0) = 0$ 、

$$\phi''(0) = \int_0^\infty d\epsilon \frac{\log \epsilon (\cosh \epsilon - 2)}{(1 + \cosh \epsilon)^2} = \frac{7\zeta(3)}{2\pi^2},$$

から、(2.49) は次の様に近似できる。

$$T \equiv T_c(V) = T_{c0} \exp \left[-\frac{7\zeta(3)}{16e^{2\gamma}} \left(\frac{VT_{c0}}{V_{10}T} \right)^2 \right] \simeq T_{c0} \left\{ 1 - \frac{7\zeta(3)}{16e^{2\gamma}} \left(\frac{V}{V_{10}} \right)^2 \right\} \quad (2.50)$$

ここで、 $\zeta(n)$ は Riemann の zeta 関数である。従って、転移温度 $T_c(V)$ は電圧 V の 2 乗に比例して下がる。他方、低温領域 $T \ll e|V|$ 、では、Sommerfeld 展開を使って振る舞いを調べることが可能で、温度 T の 2 次までで、

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{eV}{2T}\right) &= -\int_0^\infty d\epsilon \log \left(\frac{\epsilon}{2T} \right) \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{1}{e^{(\epsilon-eV)/(2T)} + 1} + \frac{1}{e^{(\epsilon+eV)/(2T)} + 1} \right] \\ &\simeq \log \frac{e|V|}{2T} - \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{T}{eV} \right)^2 = \log \frac{e|V|}{2T} - \frac{2e^{2\gamma}}{3} \left(\frac{TV_{10}}{T_{c0}V} \right)^2 \end{aligned}$$

と評価される。従って、第 1 閾電圧 $V_1(T)$ は、

$$|V| = V_1(T) \simeq V_{10} \exp \left[\frac{2e^{2\gamma}}{3} \left(\frac{TV_{10}}{T_{c0}V_1} \right)^2 \right] \simeq V_{10} \left\{ 1 + \frac{2e^{2\gamma}}{3} \left(\frac{T}{T_{c0}} \right)^2 \right\}, \quad (2.51)$$

となり、温度の 2 乗に比例して増加する。

Sommerfeld 展開は広く使われるが、その収束性や有効領域についてはあまり議論されることがない。ここでは、 $\phi\left(\frac{eV}{2T}\right)$ を例にそれについて調べておこう。Appendix E で示されるように、(2.48) で定義される $\phi(x)$ を素朴に Sommerfeld 展開すると係数の漸近形は

$$\sqrt{n}(2n)^{2n-1}$$

に比例する。従って、Sommerfeld 展開の収束半径は 0 で漸近級数の意味しかもたない。漸近級数は次数をあげていくと発散するので、有限項の打ち切り誤差を評価することが重要である。Appendix E で示されるように、 $\epsilon \equiv \frac{2T}{eV}$ とおくと、(2.47) は次のように評価される。

$$\left| \int_0^{\omega_c/T} \frac{d\epsilon}{\epsilon} \frac{\sinh \epsilon}{\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh \epsilon} - \left(-\log \frac{eV}{2\omega_c} + \frac{\pi^2}{6} \epsilon^2 \right) \right| < \left| \epsilon^3/2 - (-2\log V + 1 + 2\epsilon + 2\epsilon^2) e^{-1/\epsilon} \right| + 2e^{-1/\epsilon}$$

従って、例えば、 ϵ の誤差項が 2 次の項の 1/10 であるためには、 $\epsilon < 0.35$ でなければならない。すなわち、(2.51) が成立するためには ϵ はこの程度に小さい必要がある。

領域 B と領域 C の境界線 $|V| = V_2(T)$ (図 2.3 中の破線) は、自己無撞着方程式 (2.42) がゼロでない解を持てなくなる境界である。図にあるように、この曲線はスケールした変数を用いても結合定数 λ に依存し、 $(|V|, T) = (V_{20}, 0)$ から始まり図中の 3 重点 $P(V^*, T^*)$ で止まる (領域 A の境界はスケールした変数で表した場合、結合定数に依存しないことに注意)。以下、3 重点近くのふるまいを詳しく調べよう。これは、 $\frac{dV_1(T)}{dT} = 0$ となる温度 T^P と T^* の大小に大きく関係する。実際、電圧 V を固定し、温度 T を増加させた時の自己無撞着方程式の 0 でない解の個数は、 T^P と T^* の大小により表 2.1–2.3 の様に変化する。

表 2.1: ゼロでない自己無撞着方程式の解の個数と電圧 V の関係 ($T^* < T^P$ の場合)

電圧	T を増加させていったときの 0 でない自己無撞着方程式の解の個数
$V < V_{10}$	1 個 \rightarrow 0 個
$V_{10} < V < V^*$	2 個 \rightarrow 1 個 \rightarrow 0 個
$V^* < V < V^P$	2 個 \rightarrow 0 個 \rightarrow 1 個 \rightarrow 0 個
$V^P < V$	2 個 \rightarrow 0 個

表 2.2: ゼロでない自己無撞着方程式の解の個数と電圧 V の関係 ($T^* > T^P$ の場合)

電圧	T を増加させていったときの 0 でない自己無撞着方程式の解の個数
$V < V_{10}$	1 個 \rightarrow 0 個
$V_{10} < V < V^*$	2 個 \rightarrow 1 個 \rightarrow 0 個
$V^* < V < V^P$	2 個 \rightarrow 1 個 \rightarrow 2 個 \rightarrow 0 個
$V^P < V$	2 個 \rightarrow 0 個

表 2.3: ゼロでない自己無撞着方程式の解の個数と電圧 V の関係 ($T^* = T^P$ の場合)

電圧	T を増加させていったときの 0 でない自己無撞着方程式の解の個数
$V < V_{10}$	1 個 \rightarrow 0 個
$V_{10} < V < V^* = V^P$	2 個 \rightarrow 1 個 \rightarrow 0 個
$V^* = V^P < V$	2 個 \rightarrow 0 個

実は、3 重点 T^* は、以下の (2.53) で定義される K_2 が 0 になる温度であり、この条件を数値的に調べることにより、 $T^* < T^P$ を示す⁶。これらを説明するために、自己無撞着方程式 (2.42) を 3 重点近くで Ginzburg-Landau 展開して調べよう。 Δ_0 の 4 次までで自己無撞着方程式は次の様に展開される。

$$0 = \frac{1}{\lambda} + S(0, V, T) + \{S(\Delta_0, V, T) - S(0, V, T)\} = \frac{\chi_N}{\lambda} - \frac{K_2 \Delta_0^2}{T^2} + \frac{K_4 \Delta_0^4}{4T^4}$$

曲線 $V = V_1(T)$ 上の一点 (T_A, V_A) を任意に選ぶ時、 $\Delta T \equiv T - T_A$, $\Delta V \equiv V - V_A$, Δ_0 を展開が有効である程度に小さい量にとる。以下、この曲線上の展開を考えよう。

$$K_2 \left(\frac{\Delta_0}{T} \right)^2 - \frac{K_4}{4} \left(\frac{\Delta_0}{T} \right)^4 = \frac{\chi_N}{\lambda} \approx \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \chi_N}{\partial T} \bigg|_{(T_A, V_A)} \Delta T + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \chi_N}{\partial V} \bigg|_{(T_A, V_A)} \Delta V \quad (2.52)$$

ここで、 $\chi_N = 1 + \lambda S(0, V, T)$ は無秩序相の安定指数であり、 K_2 、 K_4 は V_A/T_A のみに依存する関数で

$$K_2 = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sinh t}{t(\cosh(eV_A/(2T_A)) + \cosh t)} \right), \quad (2.53)$$

$$K_4 = - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sinh t}{t(\cosh(eV_A/(2T_A)) + \cosh t)} \right) \right\}$$

で与えられる。なお、 K_2 、 K_4 を計算する際、 ω_c/T_A が無限に大きいという極限を考え、積分の上限を無限大とした⁷。

(2.52) から、 $(V, T) = (V_1(T_A), T_A)$ 近傍で消失または生じる秩序変数の振舞いがわかる。そのためには、 K_2 、 K_4 、 $\frac{\partial \chi_N}{\partial T}$ 、 $\frac{\partial \chi_N}{\partial V}$ の符号がわかればよい。数値計算の結果、各々、 K_2 は $0 < T_A < T^*$ で負、 $T^* < T_A$ で正、 K_2 が符号を変える付近では K_4 は負、 $\frac{\partial \chi_N}{\partial T}$ は $0 < T_A < T_P$ で正、 $T_P < T_A$ で負、 $\frac{\partial \chi_N}{\partial T}$ は常に負であることが判った。この結果をもとに 3 重点近傍におけるゼロでない秩序変数 $|\Delta_0|$ の解の個数について以下のことがわかる。なお、図 2.4、図 2.5 には、それぞれ $1/\lambda = 2.4$ の場合についての秩序変数、電流の電圧依存性を図を示す。

- $T_P < T_A < T^*$

(2.52) の左辺は $|\Delta_0| < 2T_A \sqrt{K_2/K_4}$ で負、 $|\Delta_0| > 2T_A \sqrt{K_2/K_4}$ で正となる。一方、

⁶ 非常に狭い電圧領域ではあるが、表 2.1–表 2.3 にある $V^* < V < V^P$ での振舞いを比較してもよい。しかしながら、 $V^* < V < V^P$ となる領域は非常に狭いため数値的にこの領域を探すのは容易ではない。

⁷ 図 2.3 で第 1 閾電圧が異なる相互作用パラメータでも完全に一致してみえる。これは、この近似が正当であることを数値的に裏付けている。

右辺は、電圧、温度を増加させた際には正から負に変化するため解の数は1個から2個に変化する。これは、各々、図 2.4 左と、図 2.7 右にある $|\Delta_0|$ が大きい方のブランチに対応している。

- $T^* < T_A$

(2.52) 左辺は下に凸で、 $\Delta_0 = 0$ で0をとる単調増加関数である。電圧、温度を増加させた際には正から負に変化するため解の数は1個から0個に変化する。これは、各々、図 2.5 左にあるブランチの消失と、図 2.7 左の $|\Delta_0|$ が大きい方のブランチの消失に対応している。

以上の考察より、 K_2 が符号を変える温度 T^* が明らかに3重点の温度に一致することもわかる。

(B) 秩序変数

図 2.4、図 2.5 からわかる様に、秩序変数、電流ともに絶対零度の場合から連続的に変化する。3相の3重点Pにおける温度 T^* (図 2.3) より低温では、 $V_1(T) < |V| < V_2(T)$ で秩序変数 $|\Delta_0|$ は電圧 $|V|$ の3価関数となる(図 2.4 左)。ここで、中央のブランチは不安定であり、1次相転移が生じ得る。また、秩序変数の多価性を反映して、 $T < T^*$ において電流-電圧特性はS字型になる(図 2.4 右)。一方で、 T^* より高温の時は、不安定ブランチが消失し秩序変数は電圧の1価関数となる(図 2.5 左)。これを反映して、電流も電圧の単調増加関数になる(図 2.5 右)。

定電圧の場合、秩序変数の温度依存性を図 2.6-図 2.8 に示す。低電圧の時には秩序変数の温度依存性は零バイアスの時とほとんど変わらない(図 2.6 左)。電圧を増加すると不安定相に相当する新しいブランチが低温で生じる(図 2.6 右)。この不安定相が生じる温度では無秩序相が安定化するため、1次相転移が可能となる。さらに、電圧を増加すると安定相と不安定相のブランチが近づき、最終的には合流する(図 2.7、図 2.8 左)。なお、3重点の温度 T^* が $\frac{dV_1(T)}{dT} = 0$ となる温度 T_P より高いため、図 2.7 右に示すように合流直前に外側のブランチに不安定な領域が生じる。さらに、図 2.8 に示すように、電圧がより高く2つのブランチが合流した後は秩序相が存在できる温度領域は電圧の増加とともに狭くなっていき最終的には消失する。なお、図 2.3 に示す相図、図 2.8 に示す秩序変数の温度依存性は、Scalapino らによって調べられた過剰な準粒子数注入することで生じる非平衡超伝導相の振舞に類似している [73, 74] (差異については § 3.2 を参照)。

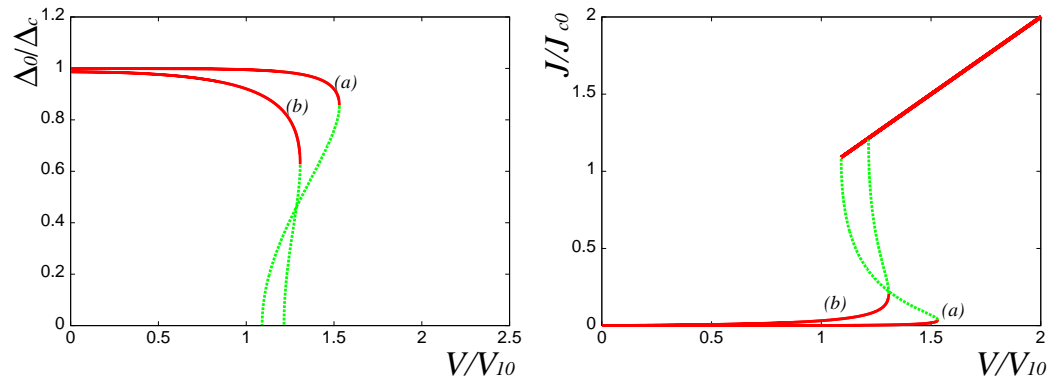


図 2.4: 左：秩序変数の電圧依存性。右：電流の電圧依存性。

(a) $T = 0.01 \exp(-1/2\lambda)|eV_{10}|$ ($= 0.194T_{c0}$)、(b) $T = 0.02 \exp(1/2\lambda)|eV_{10}|$ ($= 0.389T_{c0}$)。赤線は、定電圧、定電流の時に安定な相に、緑線は定電流の時のみ安定な相に相当する。

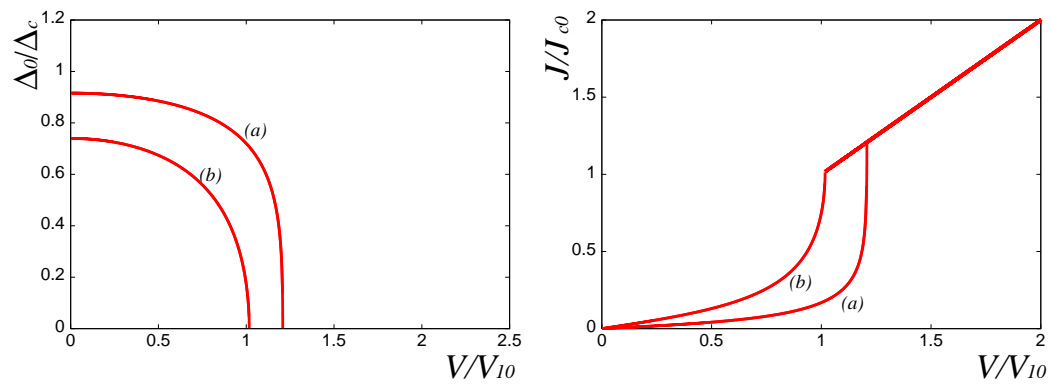


図 2.5: 左：秩序変数の電圧依存性。右：電流の電圧依存性。

(a) $T = 0.03 \exp(1/2\lambda)|eV_{10}|$ ($= 0.583T_{c0}$)、(b) $T = 0.04 \exp(1/2\lambda)|eV_{10}|$ ($= 0.778T_{c0}$)。このとき全ての相は安定である。

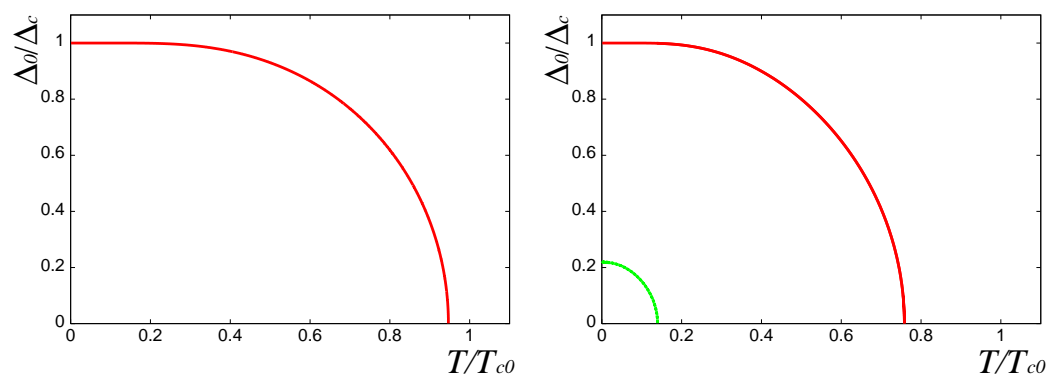


図 2.6: 秩序変数の温度依存性 (左: $V = 0.551V_{10}$ 、右: $V = 1.047V_{10}$)。赤線は、定電圧、定電流の時に安定な相に、緑線は定電流の時のみ安定な相に相当する。

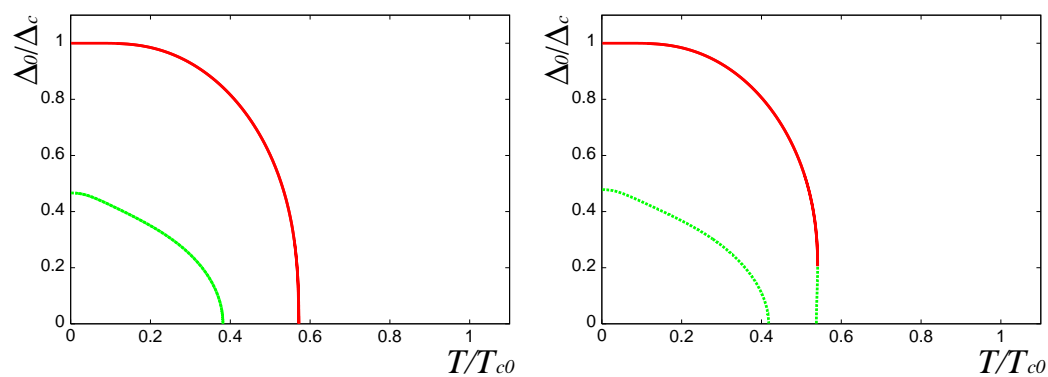


図 2.7: 秩序変数の温度依存性 (左: $V = 1.213V_{10}$ 、右: $V = 1.224V_{10}$)。赤線は、定電圧、定電流の時に安定な相に、緑線は定電流の時のみ安定な相に相当する。

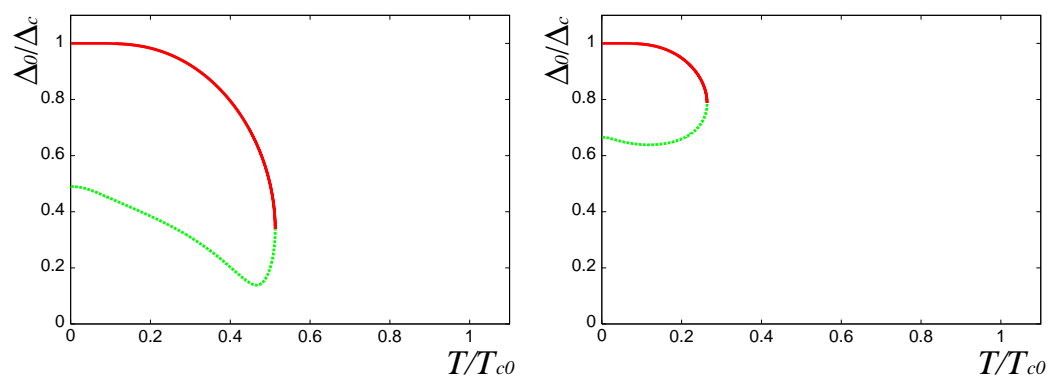


図 2.8: 秩序変数の温度依存性 (左: $V = 1.235V_{10}$ 、右: $V = 1.433V_{10}$)。赤線は、定電圧、定電流の時に安定な相に、緑線は定電流の時のみ安定な相に相当する。

2.9.4 有限温度における非平衡 Peierls 転移（電流駆動）

本節では、有限温度で系が一定の電流で駆動される場合の秩序変数、非線形伝導について調べる。

(A) 相図

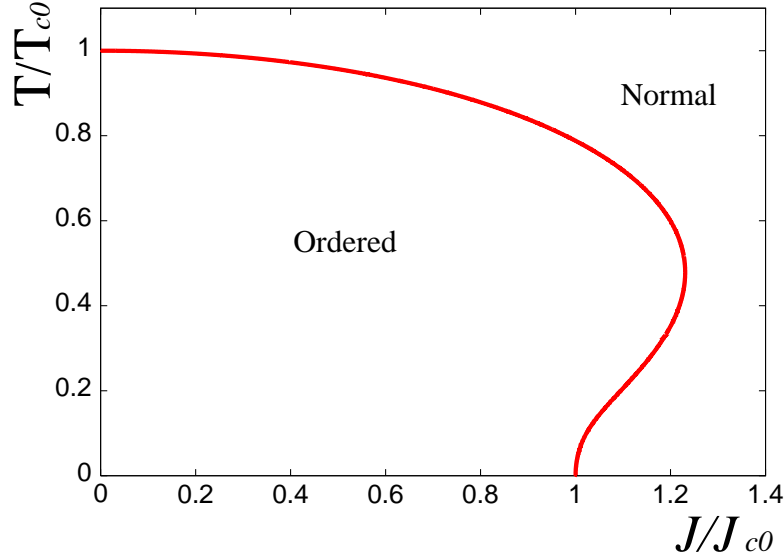


図 2.9: 電流駆動時の相図。電流駆動時は 2 次相転移のみが起こりうる。

電流駆動の時は、全ての秩序相が安定になるため、1 次相転移がなくなり全ての相転移は 2 次相転移のみになる。相図は図 2.9 で与えられ、秩序相と無秩序相の境界は、

$$\log \left(\frac{\pi T_{c0}}{2e\gamma T} \right) = \phi \left(\frac{\pi T_{c0} J}{2e\gamma J_{c0} T} \right), \quad (2.54)$$

で与えられる。但し、 $J_{c0} \equiv G_0 V_{10}$ は絶対零度における閾電流である。(2.54) からわかるように、低電流領域では転移温度 $T_c(J)$ は、

$$T \equiv T_c(J) \simeq T_{c0} \left\{ 1 - \frac{7\zeta(3)}{16e^{2\gamma}} \left(\frac{J}{J_{c0}} \right)^2 \right\},$$

で近似され、閾電流 $J_c(T)$ は低温では、

$$|J| \equiv J_c(T) \simeq J_{c0} \left\{ 1 + \frac{2e^{2\gamma}}{3} \left(\frac{T}{T_{c0}} \right)^2 \right\},$$

で近似される。さて、後述するように、秩序変数は電流の単調減少関数であるが、前節で見たように電圧に関しては単調性がない。このことより、秩序を破壊する変数という意味で、電流が自然なパラメータと考えられる。すると、電圧駆動の相図の領域 B が電流駆動

で消失することが次のように理解できる。秩序変数が大きくなるにつれ流れる電流が小さくなるため、電圧駆動の相図 2.3 の領域 B における秩序変数が大きいブランチに対応する電流は、秩序変数が小さいブランチに対応する電流より必ず小さくなる。従って、電流を変数にとると、2つのブランチは分離し、電流駆動の相図 2.9 には2つ以上の秩序相が許される領域は存在しない。

(B) 秩序変数

低温領域では、電圧駆動の場合同様、秩序変数、電圧の電流依存性は絶対零度の場合から連続的に変化する。図 2.10 左、図 2.11 左からわかるように、秩序変数は電流の単調減少関数になる。なお、 $|J| \sim 0$ では秩序変数の減少分は電流の2乗に比例するが、低温ではこの領域が非常に狭いため、図からわかるように、秩序変数の減少分は電流にほとんど比例する(図 2.10 左)。

図 2.10 右、図 2.11 右に、各々、対応する電圧-電流特性を示す。ここで、負の微分伝導度は電圧に関して電流が多価である時に限って生じるため、温度 T が T^* より低い時に限って可能であることを注意しておく。最後に、秩序変数の温度依存性を図 2.12 に示す。図より、秩序変数が電流により抑制されるという描像は温度領域、電流領域によらず正しいことがわかる。さらに、絶対零度で秩序が消える電流 $J = J_{c0}$ 以上の電流が流れると、秩序相のリエントラントが起こることが見て取れる。このとき、秩序相が存在できる温度領域はせまくなり、最終的には消失する(図 2.12 の $J/J_{c0} > 1.10$ の場合参照)。

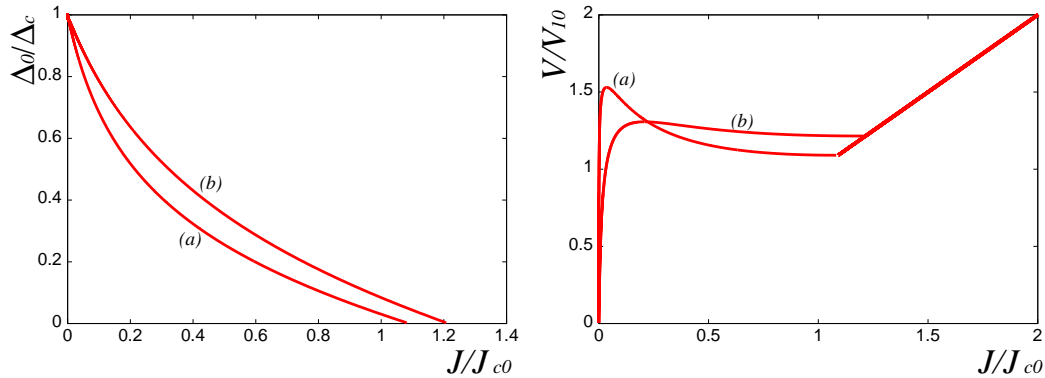


図 2.10: 左：秩序変数の電流依存性。右：電圧の電流依存性。

(a) $T = 0.01 \exp(1/2\lambda)|eV_{10}|$ ($= 0.194T_{c0}$)、(b) $T = 0.02 \exp(1/2\lambda)|eV_{10}|$ ($= 0.389T_{c0}$)。このとき全ての相は安定である。

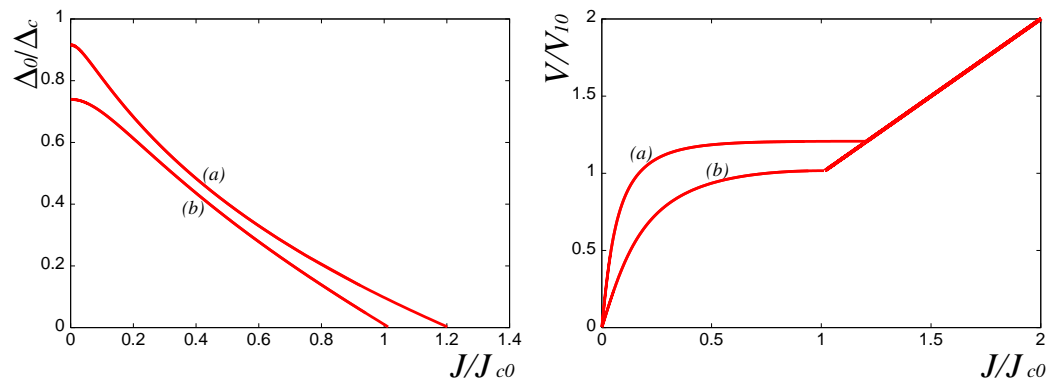


図 2.11: 左：秩序変数の電流依存性。右：電流の電流依存性。

(a) $T = 0.03 \exp(1/2\lambda)|eV_{10}| (= 0.583T_{c0})$ 、(b) $T = 0.04 \exp(1/2\lambda)|eV_{10}| (= 0.778T_{c0})$ 。

図中の全ての相は安定である。

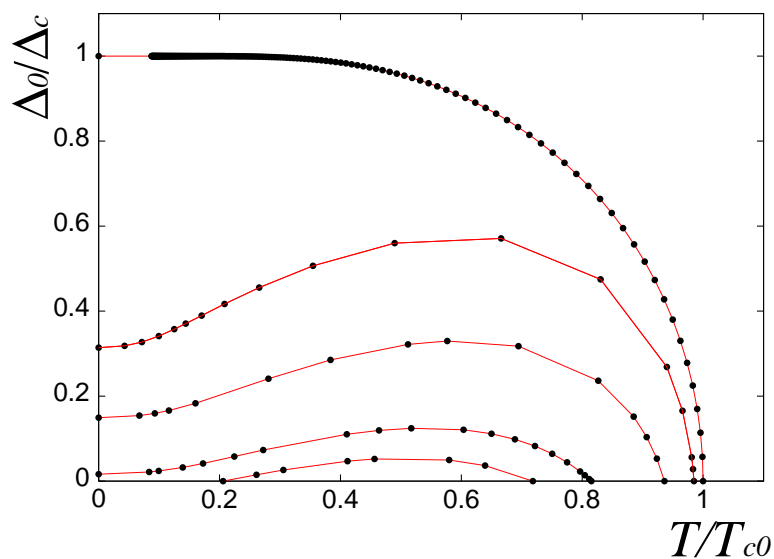


図 2.12: 秩序変数の温度依存性（上から下に向けて電流は、 $|J|/J_{c0} = 0, 0.3, 0.6, 0.95, 1.10$ である）。このとき全ての相は安定である。

2.9.5 有限温度における非平衡 Peierls 転移の定性的理論

§ 2.9.3、§ 2.9.4 では、それぞれ、有限温度で系が一定の電圧、電流で駆動される場合の秩序変数、非線形伝導について調べた。本節では、秩序変数が電圧に関して多価関数であるのに対し電流に対して一価関数になること、秩序変数が電流に関して線形に減少するこ

とを定性的に理解することを目的とする。本節では、全ての物理量は無次元化してあるものとする。

まずは、平衡にある時の秩序について考察しよう。平衡時の秩序形成は、ギャップ付近の電子が得するエネルギーと格子歪みによるエネルギー損失の合計を考慮し、エネルギー的に最も安定な状態を構成すればよい。ここで、ギャップ付近で n 個の電子がエネルギー $\Delta > 0$ 得していると仮定し、格子の歪みによりエネルギーが $K_E \Delta^2/2$ 増加すると仮定する。平衡状態における秩序変数は、以下の関数を最小化するように決定される。

$$E(\Delta) = \frac{K_E \Delta^2}{2} - n\Delta$$

従って、秩序変数は、

$$\Delta = n/K_E$$

となる。次に、定電流の時について考えよう。電流はギャップの上にある電子数に比例する。従って、電流を J としてギャップの上の電子数を $N_J = J/J_N$ とすると定電流時の秩序変数は以下の関数を最小化するように決定される。

$$E_J(\Delta) = \frac{K_E \Delta^2}{2} - (n - 2N_J)\Delta$$

従って、定電流時の秩序変数は、

$$\Delta = \frac{n - 2J/J_N}{K_E}$$

となる。すなわち、電流を決定すると秩序は一意的に決まり、電流に関して線形に減少する。次に、定電圧の時について考えよう。ギャップの上の電子数を $C(e^{\beta(\Delta - eV)} + 1)^{-1}$ と見積もれば、定電圧時の秩序は以下の関数を最小化するように決定される。

$$E_V(\Delta) = \frac{K_E \Delta^2}{2} - \left(n - \frac{C}{e^{\beta(\Delta - V)} + 1} \right) \Delta \quad (2.55)$$

図 2.13 に E_V を $K_E = 2$, $n = 1$, $C = 1$, $\beta = 10$ として $V = 0.1, 0.2, 0.5, 1$ と変化させたグラフを示す。 $V = 0.1, 0.2$ の場合、秩序相のみが安定である。 $V = 0.5$ の場合、無秩序相 $\Delta = 0$ が準安定であり、秩序相が安定である（不安定秩序相はグラフの V_E の山の部分にあたる）。 $V = 1$ の場合、無秩序相が安定で、無秩序相が準安定である。これは、前節までの結果を定性的に再現している。

まとめれば、ギャップの上にあるキャリアの数を決める電流が、ギャップ（格子変位）を決定するのである。一方、電圧からはギャップの上にあるキャリアの数が決定しないため、複数の相が存在する可能性がある。実際、ギャップが大きくキャリアが少ない状態とギャップが小さくキャリアが多い状態の双方が候補にあがった。これまでの結果からキャリアが多い状態は不安定であることがわかっているから、温度励起により多数の電子がギャップの上に供給されるほどギャップが小さくなってしまうと系は不安定化することがわかった。なお、秩序変数によるエネルギーの増加を $K_E \Delta^2/2$ と 2 次までで打ち切ったが、高次の項の影響が無視できないような系では電流を固定しても多数の準安定相が生じる可能性

があることを本節の議論は示唆している。本節の議論で用いた仮定は、ギャップの中にフェルミエネルギーがあること、秩序形成によるエネルギーを2次関数で打ち切れることの二点のみである。従って、この仮定を満たす限り電荷密度波でない系でも同様の伝導が生じることが期待される。

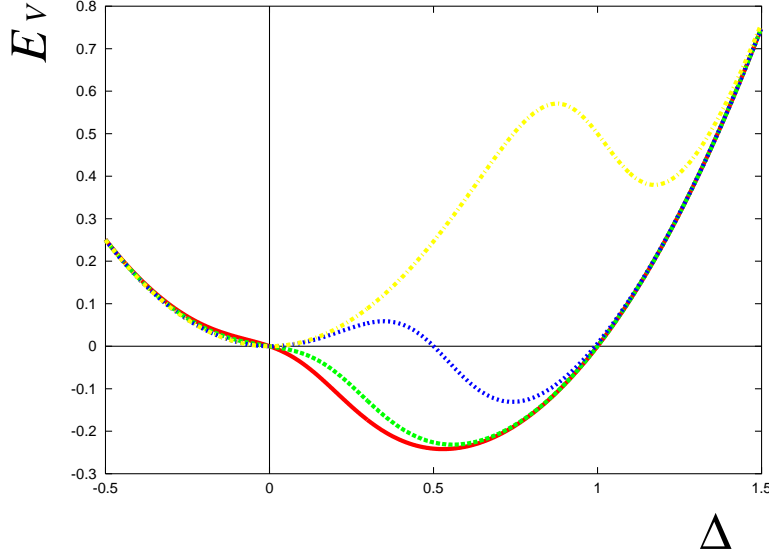


図 2.13: $E_V(\Delta)$ と Δ の関係。変数、パラメータは全て無次元化してあり、(2.55) 中で $K_E = 2$, $n = 1$, $C = 1$, $\beta = 10$ の際に $V = 0.1, 0.2, 0.5, 1$ であり、下から順番に $V = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$ である。

2.9.6 非平衡ソリトン

§ 2.6.2 で扱ったソリトンは $\Delta(x) = -\Delta_0$ の一様相と $\Delta(x) = \Delta_0$ の一様相をつないでおり、異なる振幅の一様相をつなぐソリトンは考えなかった。前節で示したように、定電圧の場合、 Δ_0 の符号を考慮すると最大5つの一様相が可能である。従って、一見、異なる一様相をつなぐソリトン励起として最大10通りのものが考えられる。しかし、今扱っている系は1次元系で、電流はどこでも同一でなければならない。一様相では秩序パラメータの絶対値が電流の1価関数であったことから、秩序パラメータの絶対値が等しい一様相をつなぐ励起のみが許されることがわかる。つまり、§ 2.6.2 で論じたソリトン解のみが可能なのである。ポーラロン解についても同様である。図 2.14 はいくつかのパラメータにおけるソリトン解の様子を示す。

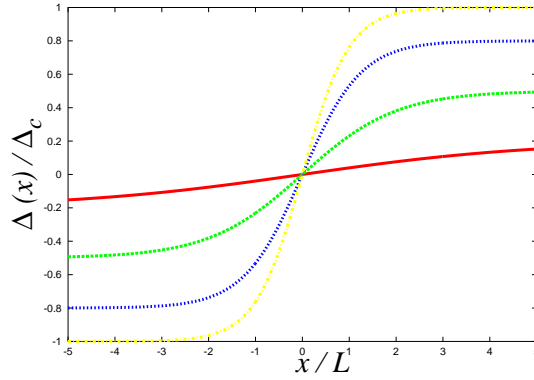


図 2.14: ソリトン解の典型的な格子変位。振幅が大きい方から順に、 $\Delta_0/\Delta_c = 1.0, 0.8, 0.5, 0.2$ である。

2.9.7 非平衡ポーラロン

ポーラロン解 (2.34) は、§ 2.9.1–2.9.4 で詳細に調べた (2.42) に加えてポーラロンの幅、束縛状態などを決定する ω_B の方程式 (2.43) が満たされた時、自己無撞着方程式の解となる。そこで、前節で調べた (2.42) の解が満たされることを前提にして、(2.43) について調べる。

絶対零度の場合

(2.43) の積分を $|\Delta_0|$ と $V_e \equiv \left| \frac{eV}{2} \right|$ の大小で場合分けして調べよう。

- $|\Delta_0| \leq V_e$ の時

$s > w$ で成立する積分公式

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - s^2}} \frac{1}{x^2 - w^2} &= \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + s^2}} \frac{1}{y^2 + (s^2 - w^2)} \\ &= \frac{1}{w\sqrt{s^2 - w^2}} \tan^{-1} \left[\frac{(x^2 - w^2) + x\sqrt{x^2 - s^2}}{w\sqrt{s^2 - w^2}} \right] + C \end{aligned} \quad (2.56)$$

を用いれば、(2.43) は、

$$\frac{\pi}{2} \theta(\omega_B - V_e) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{V_e^2 - \omega_B^2 + V_e \sqrt{V_e^2 - \Delta_0^2}}{v\kappa_0 \omega_B} \right)$$

となる。但し、 $\theta(x)$ は Step 関数で、 $\theta(x) = 0$ ($x < 0$), $\theta(0) = 1/2$, $\theta(x) = 1$ ($x > 0$) である。ここで、 $\omega_B \neq \sqrt{\Delta_0^2 - (v\kappa_0)^2}$ より、仮にポーラロンが存在する ($v\kappa_0 \neq 0$) とすると、上式の左辺が 0 であることから、 $v\kappa_0 \omega_B = 0$ となる。従って、ポーラロン解は存在しない。

- $|\Delta_0| \geq V_e$ の時
(2.56) を用いれば、(2.43) は、

$$\frac{\pi}{2} \theta(\omega_B - V_e) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{v\kappa_0}{\omega_B} \right)$$

上式は $\omega_B = V_e$ でのみ解をもち、

$$\tan^{-1} \frac{v\kappa_0}{\omega_B} = \frac{\pi}{4}$$

すなわち、

$$(v\kappa_0)^2 = \Delta_c^2 - \omega_B^2 = \omega_B^2$$

まとめれば、絶対零度におけるポーラロンは、 $V_e = \left| \frac{eV}{2} \right| = \Delta_c / \sqrt{2} = \omega_c / (\sqrt{2} \cosh \frac{1}{\lambda})$ のみで現れ、束縛エネルギーは $\omega_B = \Delta_c / \sqrt{2}$ となる。

有限温度の場合

前述したように、ポーラロン解は一様解、ソリトン解と共通の自己無撞着方程式 (2.42) :

$$\frac{1}{\lambda} = -S(\Delta_0, V, T) = \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \frac{\sinh(\epsilon/T)}{\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh(\epsilon/T)} ,$$

の解のうち、(2.43) :

$$\int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} d\omega \frac{\omega_B}{v\kappa(\omega^2 - \omega_B^2)} \frac{\sinh \beta\omega}{\cosh \beta\omega + \cosh \frac{\beta eV}{2}} = \frac{\pi}{2v\kappa_0} \frac{\sinh \beta\omega_B}{\cosh \beta\omega_B + \cosh \frac{\beta eV}{2}}$$

を満たすような ω_B が存在する場合のみ自己無撞着方程式を満たす。さて、(2.43) の辺々に $v\kappa_0$ をかければ、

$$\int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} d\omega \frac{\omega_B v\kappa_0}{v\kappa \{ (v\kappa)^2 + (v\kappa_0)^2 \}} \frac{\sinh \beta\omega}{\cosh \beta\omega + \cosh \frac{\beta eV}{2}} = \frac{\pi}{2} \frac{\sinh \beta\omega_0}{\cosh \beta\omega_0 + \cosh \frac{\beta eV}{2}} ,$$

となる。(2.43) の左辺が絶対零度で ω_B の不連続関数になったのに対し、有限温度においては、連続関数となるため、有限の幅を持つ電圧領域でポーラロンが可能となる。そこで、(2.42) の解を (2.43) に代入して数値的に解くと、図 2.15、図 2.16 の結果が得られる。

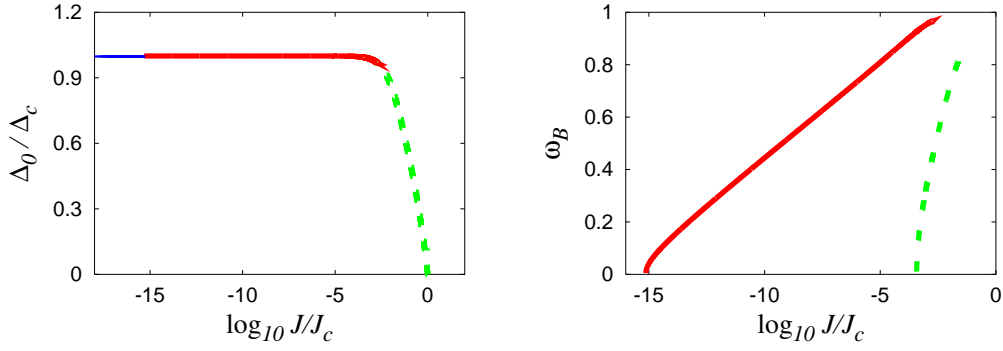


図 2.15: 左: $|\Delta_0|$ の電流依存性 ($T = 0.05T_c$)。実線は、定電圧、定電流の時に安定な相を、破線は定電流の時のみ安定な相を表す。ポーラロンは、電圧・電流駆動の安定相のうち太線部分のみで可能である。右: 正の束縛状態のエネルギー ω_B の電流依存性 (実線は $T = 0.05 \times T_c$ の時を、破線は $T = 0.2 \times T_c$ の時を表す。)

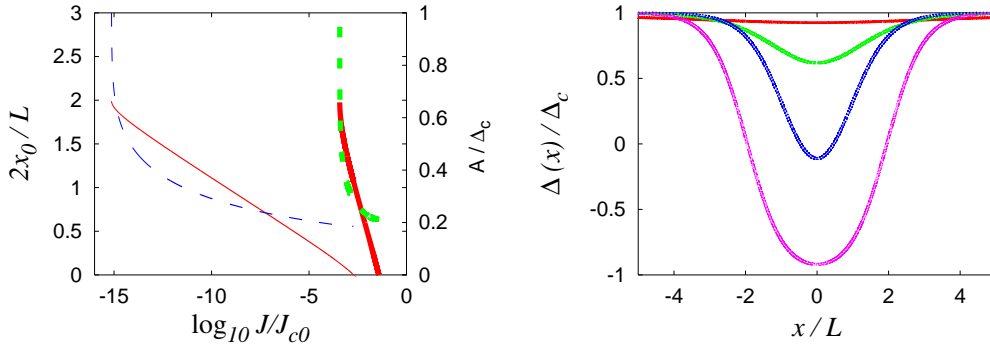


図 2.16: 左: ポーラロン振幅 A の電流依存性 (実線) とポーカロンの大きさ $2x_0$ (破線) の電流依存性。細い線は、 $T = 0.05 \times T_c$ の場合を、太い線は $T = 0.2 \times T_c$ の場合を示す。なお、 $2x_0$ は $L = \hbar v/\Delta_c$ でスケールしてプロットした。右: ポーラロンに伴う典型的な格子変位 ($T = 0.05 \times T_c$)。上から順に $|J| = 10^{-3}J_c$ 、 $10^{-5}J_c$ 、 $10^{-10}J_c$ 、 $10^{-15}J_c$ である。

図 2.15 左は $T < T^*$ (電圧駆動で不安定相が存在する温度領域) における秩序変数 $|\Delta_0|$ と電流 $|J|$ の関係を示したものである。図中で、青い細線は、一様解における安定相 (定電圧、定電流) にあたる解のうち、(2.43) を満たす ω_B が存在しない相に、赤い太線は、一様解における安定相 (定電流、定電圧) のうち (2.43) を満たす ω_B が存在し、ポーラロン励起が可能となる相に、緑の破線は一様解のうち定電流で安定、定電圧で不安定な相に相当する。緑の破線に相当する相では (2.43) を満たす ω_B が存在しないが、この相が存在しない温度領域 ($T > T^*$) では、電流の全ての値について (2.43) を満たす ω_B が存在しない。すなわち、一様解における定電流で安定かつ定電圧で不安定な相ではポーラロンが起こり得ないにもかかわらず、この相が存在しない温度領域では全相でポーラロンが起こり得ないのである。図からわかるように、 $T < T^*$ では (2.43) が ω_B に関して解を持つ電流の最小値と最大値

を $J_1(T)$, $J_2(T)$ とおく) $J_1(T) < |J| < J_2(T)$ の領域の電流においてポーラロン励起が可能になる。さて、定電圧で不安定な相ではポーラロンが存在できないため、ポーラロンが存在できる領域では電流、電圧には 1 対 1 の対応関係があり、(2.43) が ω_B に関して解を持つ電圧の最小値と最大値を $V_1(T)$, $V_2(T)$ とおくと、電圧駆動では $V_1(T) < |V| < V_2(T)$ のときポーラロンが励起できる。この時、 $\delta V(T) \equiv V_2(T) - V_1(T)$ 、 $\delta J(T) \equiv J_2(T) - J_1(T)$ とおくと、低温では、 $\delta V(T)$ は $\delta V(0) = 0$ かつ $T > 0$ で単調減少であり、 $\delta J(T)$ は $\delta J(0) = 0$ かつ $T \geq 0$ で単調増加である。低温で $\delta V(T)$ が単調減少であるのに対し、 $\delta J(T)$ が単調増加であるのは、低温においてポーラロンが許される相がほとんど絶縁体になっていることに起因する。このように、絶対零度で $\delta V(T)$ が不連続で、 $\delta J(T)$ が連続になっているという点で、電流は電圧より自然なパラメータであると言える。

有限零度におけるポーラロンの振る舞い

以下では、 $T < T^*$ におけるポーラロン：

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \Delta_0 - v\kappa_0(t_+(x) - t_-(x)) \\ t_{\pm}(x) &\equiv \tanh \kappa_0(x - a \pm x_0), \quad \tanh 2\kappa_0 x_0 = \frac{v\kappa_0}{\Delta_0},\end{aligned}$$

の特徴を調べる。まずは、ポーラロンの幅 $2x_0$ 、及び振幅 $A \equiv 2(v\kappa_0)^2/(|\Delta_0| + \omega_B)$ と電流 $|J|$ の関係を図 2.16 左に示す。図よりわかるように、ポーラロンの幅、振幅は、電流（もしくは電圧）に関して単調減少関数である。なお、ポーラロンの幅は $|J| = J_1(T)$ （もしくは $|V| = V_1(T)$ ）で発散し、 $|J| = J_2(T)$ （もしくは $|V| = V_2(T)$ ）で 0 になる。他方、ポーラロンの振幅は $|J| = J_1(T)$ でソリトンの振幅 $|\Delta_0|$ になり、 $|J| = J_2(T)$ （もしくは $|V| = V_2(T)$ ）で 0 になる。すなわち、ポーラロンは $|J| = J_1(T)$ で、ソリトンとアンチソリトンに分離し、電流（もしくは電圧）を上昇させることによりこのペアが結合して形成され、最終的には $|J| = J_2(T)$ で振幅が 0 になり一様解に収束することになる。参考に、図 2.16 右にポーラロンの特徴的な格子プロファイルを示す。図中の下から上に向けて電流が高い場合を表しており、分離したソリトン - アンチソリトンのペアから一様解に収束していく様子がはっきりとみてとれる。

次に、束縛状態のエネルギー ω_B と電流の関係を図 2.15 右に示す。図からわかるように束縛状態のエネルギーは $|J| = J_1(T)$ で 0（ギャップの中心）であり、 $|J| = J_2(T)$ では $\pm\omega_B = \pm\Delta_0$ である。これは、電流を増加させることにより、ソリトン - アンチソリトンペアから一様解に変化するという描像と両立する。

尚、ソリトンの場合と同様に、1 次元系における電流の一様性より、ポーラロンは同一の振幅の一様相をつなぐものに限られることに注意しておく。

第3章 まとめと考察

3.1 まとめ

第I部では異なる化学ポテンシャルを持つ熱浴に挟まれた平均場 TLM モデルを用いて非平衡定常状態 (NESS) における Peierls 転移について調べた。電子場の NESS は、 C^* 代数の結果である公式 (1.4) を用いて構成し、秩序を特徴づける平均格子変位 (秩序パラメータ) は、格子変位の運動が凍っている条件 (格子変位の運動方程式の固定点条件) を自己無撞着に解くことで求めた¹。

まず、一様相について調べ、次の様な結果を得た。電圧と温度をパラメータに相図を書くと3つの領域が存在することが判った。すなわち、単一の秩序相のみが安定である領域 A、無秩序相と秩序相が安定で、他に不安定な秩序相が1つ存在する領域 B、安定な無秩序相のみが存在する領域 C の3領域である (図 2.3 を参照)。領域 A と領域 C の間の転移は2次相転移であり、転移温度は電圧の減少関数になる。領域 B では、秩序相と無秩序相の間に1次相転移が可能である。領域 A、C では電流は電圧の1価関数であるが、領域 B では3価関数となる。この結果、3領域の3重点における温度 T^* 以下では負の微分伝導度が生じる。

他方、電流と温度をパラメータとすると全ての秩序相は安定化され、秩序相、無秩序相の間の転移は常に2次相転移となる。電気伝導については、電圧駆動の時と同じく3重点の温度 T^* より低温では負の微分伝導度が生じる。また、電流が絶対零度における転移電流 J_{c0} より大きい場合には、温度変化の下でリエントラントが見られた。つまり、電圧駆動、電流駆動にかかわらず、低温では温度が秩序を抑制することが判った。

以上から、「定常状態における秩序パラメータが電流の1価になるが電圧の多価になる」、「秩序は電流の単調減少関数である」という意味で電流は電圧よりも自然なパラメータであることが結論される。電圧駆動時の、秩序パラメータの多価性を反映して、相共存による特徴的な伝導が定電圧の時に起こりやすい可能性がある。例えば、定電圧のもとでおこる θ -(BEDT-TTF)₂CsM(SCN)₄ ($M = \text{Zn, Co, Co}_{0.7}\text{Zn}_{0.3}$) のサイリスター効果の原因がこの特徴に起因する可能性がある。これについては、次節で述べる。

次に、ソリトン励起を調べた。ソリトンの幅と振幅は平衡状態の場合と同様、互いに反比例し、ソリトンの振幅は一様解と同一の自己無撞着方程式に従う。これより、低温では、電圧、温度は振幅を抑制し、ソリトンの幅は電流の増加関数であることがわかる。また、ソリトン解は $\pm\Delta_0$ という異なる一様解を連続的につなぐため、一様解とソリトン解は同じ安定性を持つと考えられる。

最後に、ポーラロン励起を調べた。平衡状態ではポーラロンは、電子のエネルギーギャップ

¹ 平衡状態の場合と同様に [75]、平均場近似は非平衡であっても定性的には正しい振る舞いを与えると考えられるが、定量的には誤った結果を与える。

ブ内に形成される束縛状態の下束縛状態にフェルミオンが温度毎に決められた適当な比率で占有されている場合に実現される。平衡状態ではこの占有比率は実現されえず、スピンレス TLM モデルではポーラロンは励起されないことが知られている（例えば、絶対零度近傍で下に約 2 個、上に約 1 個の電子を埋めなければならないが、当然、これはスピンレスでは不可能である）。

非平衡状態では、束縛状態と熱浴が系の大きさ ℓ に対して指数的に小さく結合することで、束縛状態付近のエネルギーを持つ熱浴電子が自己無撞着方程式に有限の寄与をする。従って、非平衡状態では、束縛状態のフェルミオンの占有数は $(f_L(\epsilon) + f_R(\epsilon))/2$ に比例する。このため、束縛状態の占有数が電流（もしくは電圧）によりうまく修正されて、スピンレスの場合にもポーラロンが励起される。ポーラロンが存在するには、ある閾値以上の電流（もしくは電圧）をかける必要があり、このポーラロンは非平衡に特有の現象である。これは、電流が系に局所的な構造を作りうることを主張しており、ミクロ系における散逸構造の例と考えられる。このポーラロンは絶対零度では存在せず、有限温度でのみ可能であることを注意しておく。この時、ポーラロンが存在できる電流領域 $\delta J(T)$ は温度に関して増加関数で、電圧領域 $\delta V(T)$ は温度に関して減少関数であり、前者は $T \rightarrow 0$ の極限で点につぶれ後者は有限の区間にとどまる。これより、絶対零度は電圧駆動では特異点になっているが、電流駆動では特異点でないと言える。この意味でも、電流が非平衡における自然なパラメータであると言える。

他に興味深い結果として、このポーラロンは負の微分伝導度が存在する温度領域でのみ現われるが、負の微分伝導度を担う相では誘起されないことも判った。この点についてはさらに研究が必要である。

以上から、非平衡状態の相転移において、電流が、秩序を抑制する役割と秩序を誘起する両方の役割を担うことが判明した。

3.2 先行研究との相違点

2章で議論した、リエントラント、相図、図 2.8 にみられるような電圧が比較的高い領域での秩序変数の温度依存性などは、Scalapino ら [73, 74] が調べた一定量の過剰準粒子が存在する非平衡状態における超電導体の相転移に類似している。

これは、自己無撞着方程式の類似性から理解することができる。実際、自己無撞着方程式 (2.42) において $\sqrt{\epsilon^2 + \Delta_0^2}$ を E で置き換えれば、自己無撞着方程式は次のように書き換えられる。

$$\frac{1}{\lambda} = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{E} \left\{ \tanh \frac{1}{2T} \left(E - \frac{eV}{2} \right) + \tanh \frac{1}{2T} \left(E + \frac{eV}{2} \right) \right\} \quad (3.1)$$

この式の第 2 項目を無視し $eV/2$ を、有効化学ポテンシャル μ^* で置き換えれば Scalapino らの自己無撞着方程式に一致する（Ref. [73] の (6) 式）。すなわち、本論文で議論した電荷密度波の電流（電圧）による抑制現象は、熱浴から供給される過剰電子による抑制現象と解釈できる。また、(3.1) の 2 項目が存在することにより、Scalapino らの結果と本論文の結果は低電圧領域で異なっている。

TLM モデルは強相関係の代表的なモデルの 1 つである extended Hubbard モデル [15] 及びこれと Jordan-Wigner 変換で等価になる XXZ モデル [14] と平均場近似の下で等価である。これらの系の非平衡定常状態は近年、Lindblad 法を用いて調べられている。例えば、XXZ モデルでは、バンド幅のオーダーの電圧を印加すると電圧が電流の多価関数となり負の微分伝導度が現れることが報告されている。この結論は、バンドギャップ程度の電圧の下で電流が電圧の多価関数になり負の微分伝導度が生じるという本論文の結論とは合わない。しかしながら、extended Hubbard、XXZ モデルでみつかった負の微分伝導度は Lindblad 方程式をベースに解析されており NESS の作り方が異なる。すなわち、本論文で扱った NESS は無限熱浴とのコンタクトで導入されたのに対し Lindblad 方程式では境界にあるスピンを熱雑音で駆動することにより導入される。この事情および平均場近似を反映して結果が異なると考えられるが、より詳しい議論が必要である。

3.3 Terasaki らの実験との比較

Terasaki らは電荷秩序が生じる有機導体 θ -(BEDT-TTF)₂CsM(SCN)₄ ($M = \text{Zn, Co, Co}_{0.7}\text{Zn}_{0.3}$) の b 軸方向の電気伝導特性を調べ、電圧駆動時の電流のヒステリシスの存在、電圧駆動時の電流の自発的振動 (サイリスター効果)、電流駆動時の負の微分伝導度を報告している [69, 70, 71, 72]。これは、本章で調べた TLM モデルの非平衡における振る舞いに酷似している。

Terasaki らの実験との対応を考えるために、TLM モデルと電荷秩序状態の存在が知られている extended Hubbard モデルの対応を考えよう。ハーフフィルドのスピンレス Hubbard モデル

$$H_{\text{CO}} = -t_0 \sum_{j=0}^{L-1} \{C_{j+1}^\dagger C_j + C_j^\dagger C_{j+1}\} + U \sum_{j=0}^{L-1} n_{j+1} n_j - U \sum_{j=0}^L n_j, \quad (3.2)$$

は、平均場近似を適用後には TLM モデルと等価になる。ここで、 $n_j = C_j^\dagger C_j$ はサイト j のスピンレスフェルミオンの数演算子であり、TLM モデルの格子変位は、extended Hubbard モデルの偶数サイトと奇数サイトの電荷の差に対応する。平均場近似は、系の定性的な振る舞いを説明すると考えられるので、本論文の結果から、extended Hubbard モデルにおける電荷秩序は電流によって抑制されると結論できる。この事実から、Terasaki らが調べた有機導体においても同様の現象が生じていることが期待される。実際、本論文と Terasaki らのによる実験結果の定性的傾向と類似している。Terasaki らの実験では、電荷秩序のギャップは、ほとんど温度によらず電流に比例して減少することが報告されている [70]。Figs. 2.10 左に示すように、本論文の結果も $T < 0.4T_{c0}$ の範囲で同様の振舞いを示す。厳密には、§ 2.9.5 で行った定性的な評価では秩序変数は電流に関して線形に減少するが、自己無撞着方程式をもとにした理論計算では、秩序変数は、 $J \sim 0$ において電流の 2 乗に比例して落ちる。しかしながら、負の微分伝導度が現れる様な温度領域では秩序変数が電流の 2 乗に比例するような領域は極めて小さく、弱電流領域であっても秩序変数はほぼ電流について線形に落ちるのである (Figs. 2.10 左、図 2.11 左)。

さらに、本論文の結果によれば、負の微分伝導度が生じるのは無秩序相が不安定になる電圧 $V_{10}(T)$ よりも有限の大きさを持つ秩序変数が消失する電圧 $V_{20}(T)$ が高いことによる。

図 2.3 からわかるように、絶対零度でこの電圧差は最大となる。さて、 $V_{20}(T) - V_{10}(T)$ は結合定数 λ に関して減少関数なので、 $\lambda \sim U/(\pi t_0)$ が大きくなりすぎると負の微分伝導度が消失することになる。逆に言えば、クーロンエネルギー U があまり小さくなく、脆い電荷秩序を持つ系で負の微分伝導度が生じ易いといえる。Terasaki らが調べた有機導体の電荷秩序は脆いので、観測された負の微分伝導度の原因は、本論文で検討した電荷注入による（電荷）秩序の抑制であると考えられる。電荷秩序が存在すると、外場に対してその位相が変化する位相励起が、本論文で論じたような振幅励起より前に生じることが考えられるが、有機導体の様な素材では電荷秩序の位相自由度は長距離秩序をもたないことが知られており、本論文で議論したような振幅の自由度の振る舞いが主因となった非線形伝導が起きていると予想される。

また、電圧駆動時に電流が自発的に発振のメカニズムに対しては、次のようなメカニズムが提唱できる。既に述べたように、秩序変数は低温かつ特定の電圧をかけることにより電圧の 3 価関数となり、2 個は安定、1 個は不安定となっている。秩序変数を定める自己無撞着方程式は、秩序変数の運動方程式の固定点条件であり、安定性は固定点における線形安定性であった。従って、第 0 近似では、秩序パラメータの発展方程式はダブルウェルポテンシャル中の粒子の運動と等価であり、固定点間の秩序変数の振動が、電流の振動に対応すると考える²。

上記の理由で、Terasaki らが発見したサイリスター効果、負の微分伝導度などの現象 [69, 70, 71, 72] は、電流による電荷秩序の抑制が原因になっていると結論できる。

3.4 ポーラロンの観測可能性

本論文では、系にできる局所的な構造としてソリトン、ポーラロンについて論じた。実験的には、ソリトンとポーラロンを区別するためには、バンドギャップ内にある束縛状態の数を調べれば良いが、実験の精度的な問題でこれが難しい場合があった。本論文での結果より、非平衡状態でもソリトンの束縛状態のエネルギーは平衡状態と同じくバンドの中心位置にとどまり、ポーラロンの束縛状態のエネルギーは電流の効果によりバンド中心から、伝導体の底、及び価電子体の上端に向かって変化することが判明した。従って、非平衡状態を作ることにより、2 つの励起を実験的に検出可能である。これは、低次元導体の実験に新しい方法を提唱したことになる。

3.5 今後の展望

本研究により、新しい知見が得られたが、同時に、新しい課題も明らかになってきた。そのいくつかを、以下、列挙する。

一様解、ソリトン解、ポーラロン解の振幅の自己無撞着方程式は $\tilde{\xi}_-$, $\tilde{\eta}_-$ の実部が 0 で虚部が等しいという条件の下で導いた。実際には、一様解、ポーラロン解に $\tilde{\xi}_- = \tilde{\eta}_-$ を、ソリトン解に $\tilde{\xi}_-^* = -\tilde{\eta}_-$ を課すことで同一の式を導くことができる。他方、一様解、ポーラロン解に $\tilde{\xi}_-^* = \tilde{\eta}_-$ をソリトン解に $\tilde{\xi}_- = \tilde{\eta}_-$ を課すと、 $\tilde{\xi}_-$, $\tilde{\eta}_-$ の効果が陽に残る自己無撞着

² 秩序変数は電流の 1 価関数であり、定電流源では電圧は振動しえないことになる。

方程式が得られる。この違いは、一様解、ポーラロン解では秩序変数の位相が系の両端で揃っているのに対し、ソリトン解では、ずれていることによる。すなわち、秩序変数の電子場との境界における位相差が電気伝導を左右することを意味する。この点については、今後、検討していく。

本論文では、電流により誘起されるポーラロンが存在し、それに伴う束縛状態が電流に大きく依存することを示した。束縛状態の存在は、そのエネルギーをスペクトロスコピーなどの方法で観測することにより確かめることが原理的には可能である。そこで、本論文で予見した電流により励起されるポーラロンの測定可能条件を吟味していきたい。

前節で述べたように定電圧源と接触して θ -(BEDT-TTF)₂CsM(SCN)₄ ($M = \text{Zn}, \text{Co}, \text{Co}_{0.7}\text{Zn}_{0.3}$) における自発発振はダブルウェルポテンシャル中の秩序パラメータの振動に起因する可能性があるが、その確たる証拠を得るには至っていない。本論文では触れなかったが、これまでに断熱近似のもとで振動運動がでることは既に確かめたが、その振幅は非線形で一般には実験で見出されるような、散逸の効果を適切にとりいれ、アトラクターの存在により、自発振動が説明できるかを検討していきたい。

Benenti らは、近年の Lindblad 方程式を用いた研究で XXZ モデルにおいて負の微分伝導度が現れることを示したが、その結果は、本論文で得られたものと異なることは前述した通りである。この違いがどこから生じるかを詳しく検討していきたい。

第II部

古典系における輸送と相転移

第4章 研究の背景と目的

4.1 力学系の問題における本研究の位置づけ

力学系の研究における主たる目標は、与えられた力学系についてその軌道構造の幾何学の完全な特徴付けを与えることであり、力学系がパラメータに依存している場合には、パラメータが変化したときの軌道構造の変化を特徴づけることである [76]。力学系は、物理のみならず経済、生態系における個体数など多岐にわたって現れ、力学系の研究意義は多様であるが、例えば、以下の様に大別できる。

- 1 惑星の運動など、小自由度系そのものを理解すること。
- 2 化学反応系など、大自由度系において自由度を逡減した本質的な物理量の振舞いを理解することで全系の振舞いを定性的に理解すること。
- 3 統計力学の基本仮定であるエルゴード仮説を個別系において調べること

古典力学系の輸送現象は、相空間における輸送現象から注目する自由度以外を消去することで導くことができる。従って、本質的な自由度を取り出した相空間における軌道構造が重要となるが、単純な力学系であっても極めて複雑な構造を持つため、解析は困難である [77]。

力学系の問題は、Poincaré によって飛躍的に発展し、リアプノフ数（初期値の差に対する指数的な鋭敏性を測る量）が正であるような極めて複雑な運動（カオス）が様々な系で生じることがわかっている [78]。カオスが2自由度以上の幅広い系で見られることを見るために、まずは以下の Hamiltonian で与えられる問題を考察する。

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{I} \in \mathbf{R}^n, \quad \boldsymbol{\theta} \in S^n \quad (4.1)$$

ここで、 H_1 は $\boldsymbol{\theta}$ に関して 2π 周期関数であるとする。さて、 $\epsilon = 0$ の時の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}} &= 0 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \nabla_{\mathbf{I}} H_0(\mathbf{I}) \equiv \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{I}), \end{aligned}$$

であり完全に積分が実行可能である。このように、アクション、アングルが自由度の数だけ存在する系を可積分系という。また、(4.1) のように可積分系に摂動を加えた系を近可積分系という。(4.1) の積分可能性について調べよう。(4.1) において $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$ をアクション、アングル $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\phi})$ に移すような正準変換が存在すれば (4.1) は可積分である。正準変換のジェネレーター $S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J})$:

$$\mathbf{I} = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}), \quad \boldsymbol{\phi} = \nabla_{\mathbf{J}} S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}),$$

が摂動展開 $S = \theta \cdot J + \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2$ 可能であるとする。さらに、新しい座標 (J, ϕ) での Hamiltonian を $K(J) = K_0(J) + \epsilon K_1(J) + O(\epsilon^2)$ と摂動展開すると、Hamilton-Jacobi 方程式は、

$$H_0(\nabla_\theta S) + \epsilon H_1(\nabla_\theta S, \theta) = K_0(J) + \epsilon K_1(J) + O(\epsilon^2),$$

となる。上式を ϵ の各次数で比較すれば、

$$\begin{aligned} K_0(J) &= H_0(J) \\ K_1(J) &= H_1(J, \theta) + \nabla_\theta S_1 \cdot \omega_0(J), \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。第一式は、 K_0 を定める。ここで、 S が θ の周期関数であると仮定すれば、第二式を θ に関して周期平均することにより次式を得る。

$$K_1(J) = \bar{H}_1(J)$$

ここで、 \bar{H}_1 は θ に関しての周期平均を表す。これを、(4.2) に代入すると

$$\nabla_\theta S_1 \cdot \omega_0(J) = H_1(J, \theta) - \bar{H}_1(J),$$

となり、この式は S_1 を決定する。左辺は明らかに平均が 0 の周期関数であり、以下の様に Fourier 級数の形で解ける。

$$S_1(J, \theta) = i \sum'_m \frac{H_{1m}(J) e^{im \cdot \theta}}{m \cdot \omega_0(J)} \quad (4.3)$$

ここで、 \sum'_m は、 $m \neq 0$ の和であり、 $H_{1m}(J)$ は次式で定義される。

$$H_1(J, \theta) - \bar{H}_1(J) = \sum'_m H_{1m}(J) e^{im \cdot \theta}$$

この結果は非常に示唆的である。第一に、ベクトル場が 0 になる点 (固定点) 同士をつなぐ軌道 (セパトリックス) 近傍では ω_0 が小さくなるため、(4.3) が収束せず、周期軌道が壊れている可能性が高いことを示唆する。第二に、1 自由度の場合と $n(\geq 2)$ 自由度の場合で系の性質が大きく異なることを明確にしている。 $n(\geq 2)$ 自由度では、 $m \cdot \omega_0(J) = 0$ となる m が存在しうる。この際には、明らかに (4.3) は発散する。また、 $m \cdot \omega_0(J) = 0$ なる m が存在しない場合においても、 $\omega_0 \cdot m$ はいくらでも小さくできるため、1 自由度の場合に比べて級数 (4.3) の収束が悪いことは明らかである。実際、(4.3) が絶対収束するような ω_0 と (4.3) が発散するような ω_0 は任意に近い位置に配置されており、 S は J に関して不連続な関数である。(4.3) の導出には S の微分可能性が仮定されているから、(4.3) が収束する様な ω_0 に対しても級数 (4.3) は意味を持たない。この問題は small divisor problem [79] と呼ばれ長年未解決であった。

Kolmogorov、Arnold、Moser は Hamilton-Jacobi 方程式を解くことによって解の大域的な振る舞いを調べるという視点を変更し、相空間におけるトーラスの存在を証明することを試み、KAM の定理を提出した [80, 81, 82, 83]。KAM の定理は、 ϵ が小さい時に、「相空

間の大部分が非摂動系のトーラスに十分近いトーラスで埋められていること」、「相空間内で非常に小さな領域がカオスになっていること」を主張する¹。実際には、彼らの証明で要求されるような ϵ よりはるかに大きい値に対しても多くのトーラスが残ることが数値的に知られており、そういった点において KAM の定理は十分とはいえない。後述するように、セパトリックス付近は最もカオスが生じやすい領域であり（摂動の結果もこれを示唆する）、この周りに生じるカオス領域は stochastic layer(resonance layer) とよばれる。数値計算の結果によれば、 ϵ が小さい時相空間において非常に狭い領域に配置されている stochastic layer は、摂動パラメータを大きくしていくと徐々に大きくなり（同時に、相空間内のトーラスは徐々に破壊されていく）、最終的には相空間全体にわたるカオスが発生する [83]。

このように可積分系からカオスが生じる過程を調べる研究が一つの帰結を得た一方で、可積分からカオス性を強くしていくのとは逆に、強いカオス性を持った系を出発点にすることによりカオスを研究する方向性の研究も発展した [84]。Smale は、カオスの本質は引き伸ばしと折り畳み構造であることを指摘し、相空間の各点で双曲性（伸びる方向と縮む方向が横断的に交わる）を有する力学系（双曲力学系、公理 A、Anosov 系などと呼ばれる）を詳細に調べた。双曲力学系ではカオスが生じるため解軌道の形状は複雑となるが、エルゴード性が成立するため解軌道そのものでなく軌道の束についての議論ができる。また、数値計算による統計量の計算が有効であることが厳密に証明されているため、双曲力学系ではカオス性の弱い非可積分系と異なり数値計算という非常に強力な武器に頼ることができる。この意味では、双曲力学系は非常に良く理解されていると言ってよい。

これに対し、最初に示した近可積分系など stochastic layer とトーラスが混在する系での輸送は十分には理解されていない。これは、Hamilton 系ではアトラクターなどが存在せず、軌道は到る所で異なる構造を持つカオス領域をくまなく巡るため解析的な扱いが極めて困難であることに一因がある²。例えば、Nekhoroshev は、トーラス近傍のよどみに軌道が指数的に長い時間滞在するという見積もりは出しているが [90]、軌道構造についての知見は得られない。また、この結果は特定のトーラス近傍の局所的な振舞いを与えているに過ぎない。輸送という本論文の主題の観点では、相空間におけるカオス領域の大きさ及びカオス領域内での輸送の速さが特に重要である。つまり、相空間全体に渡る大域的な輸送を議論する必要があり、本論文ではトーラス近傍のよどみ領域やトーラスそのものといった拡散が遅い局所的な領域ではなく、非摂動系のセパトリックス近傍といった相空間全体を早く運動するカオス性の強い領域における大域的な輸送に焦点をあてる。また、力学系の理論の多くが固定点周りの解析や分岐点³ 周りの振舞いなど局所的な構造の研究を対象とすることが多いのに対し⁴、本論文では、相空間の幾何学的構造をコントロールするパラメータを分岐点近傍に留まらず変化させて解析を行っている。こういった点で、本論文

¹ もちろん、「非常に近い」や「相空間の大部分」という概念は数学的に厳密に扱う必要がある。詳細については文献 [80, 81, 82] を参照。

² 例えば、アトラクターを持つような系では軌道はアトラクターに引き付けられるため、相空間全体の構造を考慮しなくともアトラクターの議論をすれば十分である。この点に着目し成功を収めているのには、位相モデルなどが挙げられる [85]。但し、アトラクターに吸引されるような相空間の領域（吸引域）の議論などは難しい問題であり、理論は未だ不完全である [86, 87, 88, 89]。

³ 位相空間の幾何学的構造が変化する臨界点を分岐点という。

⁴ もちろん、Poincaré-Bendixson の定理 [91, 92] などの様に大域的な構造について述べた理論もあるが、局所的構造を扱う理論に比べて少数である。

の対象は系の大域的な振舞いにあることは特徴的である。

Poincaré は、微分方程式系の研究の過程で連続時間の力学系を離散時間の力学系（写像）に還元することで力学系の自由度を遞減する方法を提出した。この連続力学系と関係がつく写像系を、Poincaré 写像と呼ぶ。微分方程式の研究では、「系の自由度を遞減できる」、「いくつかの数学的定義が簡便化できる」という利点があるため Poincaré 写像の考え方がよく用いられる。特に、周期点近傍における軌道構造の研究や、homoclinic または heteroclinic 軌道近傍⁵ における軌道構造の研究などにおいて Poincaré 写像の考え方は有用である [83, 87, 93]。自励系常微分方程式（ベクトル場が時間に陽に依存しない）においては、Poincaré 写像は n 次元ベクトル場と横断的な⁶ $n-1$ 次元断面 Σ 上の x から出発する軌道に対し最初に Σ に戻ってきた点を対応させる写像として定義される。これにより、例えば、常微分方程式の周期軌道の安定性は Poincaré 写像の周期点の安定性で理解される。他方、非自励系常微分方程式においては、次式でベクトル場 $f(x, t)$ が時間 t に関して周期的な場合が Poincaré 写像が有効である典型例である。

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}$$

$f(x, t)$ が t に関して周期 $T = 2\pi/\omega$ であるとする、上式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta) \\ \dot{\theta} &= \omega, \quad (x, \theta) \in \mathbf{R}^n \times S^1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

と自励系に書き換えられる。このベクトル場と断面 $\Sigma^{\theta_0} = \{(x, \theta) \in \mathbf{R}^n \times S^1 | \theta = \theta_0 \in (0, 2\pi]\}$ は明らかに横断的であり、Poincaré 写像が構成される。このように、新しい変数 θ を入れて自由度を増やす時、時間を 0.5 自由度として数える。例えば、時間に陽に依存する 1 自由度微分方程式系は 1.5 自由度系とも呼ばれる。本論文では 1.5 自由度系の Poincaré 写像である 2 次元写像系の相空間での輸送に焦点をあてて議論する。なお、写像系と微分方程式との関係は特に重要ではあるが、純粋な研究対象としても写像系の研究は広く行われていることに注意しておく。

前述したように、トーラスとカオスが共存する際には、有界領域に制限されているトーラス上の軌道ではなく stochastic layer が系の輸送を支配している。カオス領域の存在に関しては安定多様体と横断交差（馬蹄を持つこと）が重要であることは、Poincaré が指摘していたが、1974 年になって両多様体が横断的交差を起こすことと、系が非可積分であることは同値であることが Moser によって示された [94]。特に、2 次元の stochastic layer とトーラスが共存する系では、この領域にある安定多様体と不安定多様体の横断的交差によって生じる主交叉点⁷ 近傍の turnstile 型の領域の運動により輸送が完全に決定され、擬セパラトリッ

⁵ homoclinic 軌道とは、一つの固定点から出発してその固定点に戻る軌道であり、heteroclinic 軌道とは異なる固定点同士をつなぐ軌道のことである。

⁶ 例えば、 n 次元の自励系微分方程式

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

を考える。 $n-1$ 次元曲面 Σ の法線ベクトル $n(x)$ が Σ 上の任意の x で $n(x) \cdot f(x) \neq 0$ を満たす時、曲面 Σ はベクトル場 $f(x)$ と横断的であるという。

⁷ 時刻 $t = \infty$ で固定点 x_f に収束する点全体の集合を安定多様体と呼び、時刻 $t = -\infty$ で固定点 x_f に収束する点全体の集合を不安定多様体と呼ぶ。 W_u と W_s の両方に属する点を homoclinic (heteroclinic) 点

クスの内から外への流出レートや stochastic layer 内の運動は、homoclinic (heteroclinic) 構造から作られる turnstile 型領域の時間発展で記述される [93, 95, 96, 97, 98]。このように、2次元写像系における輸送は定性的には理解されているが、turnstile 型の領域の具体的特徴を掴むことや、その大きさの評価、turnstile 型領域の運動を定量的に理解することは十分にはできていない。本論文では、2次元保測写像における安定多様体、不安定多様体について考察する。特に、パラメータの変化によって位相空間の幾何学的性質が大きく変わるような系における両多様体のパラメータ依存性を詳しく調べる。

4.2 2次元写像系と Harper 写像

まずは、2次元写像系において必要な前章の用語を具体的に定義することから始める。写像 A を \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 (又は、 \mathbb{C}^2 から \mathbb{C}^2) への写像とする。 $x_f \in \mathbb{R}^2$ (又は、 $x_f \in \mathbb{C}^2$) について $Ax_f = x_f$ となる点 x_f を A の固定点と呼び、線形化方程式 $y_n = A'(x_f)y_{n-1}$ が増大する解と減少する解を持つとき、 x_f は双曲型固定点と呼ばれる。系が可積分の場合、双曲型固定点 x_f に付随する安定多様体 $W_s \equiv \{x : \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = x_f\}$ は不安定多様体 $W_u \equiv \{x : \lim_{n \rightarrow -\infty} A^n x = x_f\}$ と一致するか (homoclinic) 他の双曲型固定点の不安定多様体と一致する (heteroclinic)。このとき縮退した安定・不安定多様体は、セパトリックスと呼ばれる⁸。§ 4.1 で触れたように Poincaré は、安定多様体と不安定多様体が横断的な交差をすると、その交差は無限回起こることを示した [78]。これは、次の理由による：定義から明らかなように、ある点 x が W_u の元であれば、 Ax も明らかに W_u の元である。これは安定多様体についても同様であり、安定多様体と不安定多様体の交差点は必ず安定多様体と不安定多様体の交差点に写される。さらに、安定多様体は時間が無限大の極限で固定点に達するため、固定点に近づく方向に対しては縮められ、面積が保存されるので、他の方向に関しては引き伸ばされることになる。すなわち、安定・不安定多様体が1度交差すると、無限回の交差が起きる⁹。このように、可積分系における W_u と W_s の縮退が摂動により解かれて生じる構造を、heteroclinic 構造もしくは homoclinic 構造と呼ぶ (元のセパトリックスが heteroclinic であるか homoclinic であるかにより使いわける)。セパトリックスの分裂が生じるとその近くにある軌道はカオス的になり、stochastic layer が生み出される (stochastic layer 内を出発する初期条件の集合は相空間のある領域を埋め尽くす分布に近づく)。すなわち、セパトリックスは摂動に対して最も不安定な軌道であり、セパトリックスから生じる分裂した安定多様体、不安定多様体近傍の領域では最もカオス性が強くなる。この軌道近傍ではトーラスの近傍のカオス領域に比べて輸送が早いという点、運動可能領域が非有界であるという点を考えれば相空間での輸送を議論する上では不可欠である。カオス領域の大きさ及び輸送の速さを特徴づける量の一つに安定多様体と不安定

と呼ぶ。homoclinic 点において、安定多様体と不安定多様体の接ベクトルが接していないとき、両多様体は横断的に交わるという。また、 $S(q, x_f)$ 、 $U(q, x_f)$ を各々安定・不安定多様体の固定点 x_f から homoclinic (heteroclinic) 点 q までの切片とする。 $S(q, x_f)$ 、 $U(q, x_f)$ が、 q 、 x_f 以外に交わらない時、 q を主交点と言う。また、 $S(q, x_f)$ 、 $U(q, x_f)$ で作られる閉曲線に囲まれた領域を擬セパトリックスという。

⁸ 連続系においては、フローを用いて安定多様体、不安定多様体は定義される。

⁹ 微分方程式系ではフローは交差しないが、Poincaré 断面を考えることで、写像系に帰着できるため、上述の説明は微分系においても有効である。写像系と微分系との関係については、例えば、[99, 100] で詳しく議論されている。

多様体の交差角が挙げられる。

なお、セパトリックスの分裂に関して次の定理が知られており、セパトリックス分裂によるカオスの発生は極めて広いクラスの写像形で正しい概念であると言ってよい ([101](英訳 [102]) で予想され、[103] で証明された)。

定理 $S = S_1 \times S_2$ とする。 S_k ($k = 1, 2$) が連結な Riemann 球でない 1 次元複素多様体であるとき、 $S \rightarrow S$ で定義される解析的な微分同相写像の鞍点の安定・不安定多様体は分裂する。

また、同様な証明で、次の定理が成立する [104]。

定理 \mathbb{C}^2 から \mathbb{C}^2 への微分同相写像

$(x, y) \rightarrow (x + y + V'(x), y + V'(x))$ について、 $V(x)$ が整関数なら、任意の双曲型固定点の安定、不安定多様体は分裂する¹⁰。

これらの定理はセパトリックスによるカオス発生的一般性を主張しており非常に意義深いものであるが、残念ながら多様体の幾何学的構造を与えるものではない。両多様体の具体的形状の解析は、可積分系からの摂動展開を考えると stochastic layer の厚さが摂動パラメータ σ について指数的に小さい $\sim e^{-1/\sigma}$ という難点があるために、あまり進んでいなかった¹¹。

この問題に対する答えを与える候補のひとつとして、asymptotics beyond all orders (ABAO) の方法、Borel 変換の方法が近年発達しており、stochastic layer におけるカオス写像の振る舞いが漸近理論を用いて解析されてきている ([104] で Review がされている)。両方法は、摂動解の全ての次数の特異点周りにおける振る舞いを考慮して、摂動に用いる小さいパラメータに対して指数的に小さい効果を漸近的に導出する方法である。漸近解析は、摂動級数が発散しているようば場合であっても適当な誤差つきで解の振舞いを再現するため、摂動級数が発散するような系を扱うには非常に有効である。

ABAO 法は、Lazutkin らが提唱した方法で [109, 110] (各々 [111, 112] で英訳された)、解を時間複素面で特異点近傍の深い領域まで拡張して評価し、次の定理を用いて実時間では摂動パラメータに対して指数的に小さい精度で項を評価する方法である。

定理

$f(t)$ が $|\operatorname{Im} t| \leq b$ ($b > 0$) で解析的でその closure で連続な周期関数とする。

$f(t)$ の周期を a とし、 $e^{-\frac{2\pi b}{a}} \leq \frac{1}{2}$, $\int_0^a f(t) dt = 0$ であるとする。この時、 $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|f(t)| \leq 2 \max_{|\operatorname{Im} \tau| \leq b} |f(\tau)| e^{-\frac{2\pi b}{a}}$$

¹⁰ $V(x)$ が整関数でない場合、安定、不安定多様体は必ずしも分裂を起こすとは限らない。例えば、 $V(x) = \epsilon \frac{x - x^3}{1 + \epsilon x^2/2}$ では、積分 $H = \frac{y^2}{2} + \epsilon \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{xy}{2} - \frac{x^3 y}{2} + \frac{x^2 y^2}{4} \right)$ が存在する ([105](英訳 [106]), [107])。

¹¹ カオス性が強い場合数値計算も通常うまくいかない。ただし、1990 年になって、一部の系において有効な数値計算手法が Fontich により提唱された [108]

Lazutkin による [109, 110] の出版後、ABAO 法は Lazutkin グループにより詳しく研究され、例えば、[113] では、cylinder $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}$ もしくは、ユークリッド平面 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ で定義される次の写像 F_s のセパトリックス分裂が ABAO 法により調べられた。

$$\begin{aligned} F_s(x, y) &= (x_1, y_1) \\ x_1 &= x + y_1 \\ y_1 &= y + \epsilon f(x) \\ f(x) &= \sum_{k=1}^n a_k \sin(kx + b_k) \text{ or } f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \end{aligned}$$

ここで、 $y \in \mathbf{R}$ であり、 $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin(kx + b_k)$ の時は、 $x \in (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$ 、 $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ の時は、 $x \in \mathbf{R}$ である。[114] では、homoclinic invariant というシンプレクティック変換と homoclinic (heteroclinic) 点の選び方によらないセパトリックス分裂の指標が導入され、homoclinic invariant の漸近展開法が conjecture として提唱された (Standard map については、[115] で証明され、次章の定理 1 にあたる)。しかしながら、homoclinic invariant の漸近級数の係数の解析的決定法はわかっていない。この係数の数値計算法は複数知られおり、主要項に関しては Standard map [109, 112]、polynomial map [113, 116] において複数の方法で計算された。さらに、この漸近級数の 1 項目から 5 項目に関しては [114] で初めて与えられた (近年でも、この係数の計算法は研究されており、例えば、[117] など新しい方法が提唱されたが、この計算法の数学的証明はまだなされていない)。さらに、近年になって種々の写像の homoclinic invariant の漸近級数の発散のクラスが数値的に予想された [118]。なお、homocline invariant と輸送の直接的関係が、[119] で詳細に議論されている。

本論文では、もう 1 つの方法である Borel 変換の方法を用いて解析を行う。Borel 変換の方法では、摂動解を特異点付近のあるセクターで意味を持つ漸近級数に展開し、その Borel 和を取って他のセクターに解析接続することにより、指数的に小さな項をとりだす。このセクターを分ける境界を Stokes 線という。

この方法は、激しい振動外場を持つ振動系に初めて適用され [120]、写像系については、Hakim らによる Standard map の解析 [121] に始まり、より厳密な解析で standad map、cubic map が調べられた [122]。また、Tovbis らが独立に、Hénon 写像の解析 [123, 124] をしていることにも注意しておく。数学的に厳密な議論は、Hénon 写像の場合に、Écalle によって導入された Resurgence 理論 [125] を用いて Gelfreich-Sauzin が行った [126]。彼らは、安定・不安定多様体を非常に精度で解析的にあらわす事に成功し、安定・不安定多様体の最初の交差角を計算している。

ABAO 法、Borel 変換の方法の将来的な目標の 1 つは、Arnold 拡散を含む高次元系の理解であろう。近年では、高次元系の解析 [127, 128, 129, 100] ([128] は [130] で [129] は [131] で英訳されている) や stochastic web の解析 [132] (英語訳は [133])、non-Hamiltonian 系の解析 [134, 135] も進んできている。

本論文では、Borel 変換の方法を用いて、近可積分 Harper 写像のリコネクションを調べる。リコネクションとは摂動パラメータ以外に、パラメータが存在する系において、後者

のパラメータに依存してセパトリックスのトポロジーが変化する現象を指す。写像系のリコネクションは、例えば、[136, 137, 138] で数値的に詳しく調べられている。2次元系においては、stochastic layer はトーラスによりさえぎられて異なる stochastic layer 間の運動は禁止されているため¹²、リコネクションによる stochastic layer の結合は大域的なカオスを生むための必要条件となる。Harper 写像は次式で与えられる¹³。

$$\begin{aligned} v(t + \sigma) - v(t) &= -\sigma \sin u(t) \\ u(t + \sigma) - u(t) &= k\sigma \sin v(t + \sigma) \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで σ は離散化された時間間隔であり、摂動パラメーターの役割を果たす。 $\sigma \rightarrow 0$ の極限で、この写像は次の可積分な常微分方程式 (Harper 方程式) になる。

$$\begin{aligned} v'(t) &= -\sin u(t) \\ u'(t) &= k \sin v(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

次節以降で詳しく議論するように、Harper 方程式は $k < 1$, $k = 1$, $k > 1$ に応じて位相構造の異なる 3 種類のセパトリックスを持ち、 $k(< 1) \rightarrow 1$ (又は、 $k(> 1) \rightarrow 1$) の極限で滑らかに構造を変える (図 5.1)。これが、セパトリックスのリコネクションである。本論文では、このリコネクション転移が非可積分性によりどのように変わるかを調べる。なお、近可積分領域では、homoclinic (heteroclinic) 構造の存在のためリコネクション転移を数値的に追跡するのが難しく、解析的手法の方が有効であると考えられる。

最後に、Harper 写像により記述される幾つかの物理系の例を文献とともに列挙する。

- 進行方向に一樣な磁場中で電子波束と相互作用する荷電粒子の系 [132, 140, 141, 142]。
- 周期ポテンシャルのある 2 次元系で面に垂直な一樣磁場を受けて運動する電子の系 [143, 144]。
- 2 次元もしくは 3 次元系における非圧縮性理想流体の定常状態 [145, 146]。
- カオス領域と、レギュラーな領域が混在する系の拡散 [147]。

¹² 高次元系ではトーラス間の stochastic layer から出発する軌道も他の次元を通して安定多様体と不安定多様体の作るネットワークに沿って非常にゆっくりと拡散していく (Arnold 拡散) [139]。

¹³ この不変多様体に対するパラメータ表式は一意ではない。実際、(4.5) の解が 1 つみつければ、 t を $t + a(t)$ ($a(t)$ は周期関数) に変えたものは、任意の $a(t)$ に対して、(4.5) を満たす。

第5章 近可積分 Harper 写像のセパトリックス分裂とリコネクション転移

本章では、Harper 写像のセパトリックス分裂とリコネクション転移について論じる。Borel 変換の方法は計算が煩雑であるため、§ 5.1 で解析手法の大筋を示したのちに、主結果を述べる。§ 5.2 では、通常の摂動法を適用してセパトリックスの振舞いを調べ、問題点を明らかにする。§ 5.3 では、時間複素面の特異点近傍の振舞いを支配する内部方程式を導き、§ 5.4 でその漸近展開を調べる。§ 5.5 では、§ 5.4 の結果を用いて異なる領域に解を接続する。§ 5.6 では、Borel 変換の方法における初期条件の役割を吟味する。§ 5.7 では、以上の結果に基づき、不安定多様体のリコネクションを論じる。

5.1 概要

前節で述べたように、近可積分 Harper 写像の第 0 近似である Harper 方程式 (4.6) は、パラメーター k に依存して位相構造の異なる 3 種類のセパトリックスを持つ (図 5.1)。

本節では、 $(\pi, 0)$ の不安定多様体に注目し、 $k < 1$ の場合に $(-\pi, 0)$ から $(\pi, 0)$ へ向かうセパトリックスの縮退が解かれる過程を解析する。 $k > 1$ の場合についても簡単な変数変換を用いるだけで議論できることを指摘しておく (Appendix F)。Melnikov の摂動法による解、つまり σ に関するべき級数で展開される解を v_0, u_0 とおく。ここで、下付添字 0 は

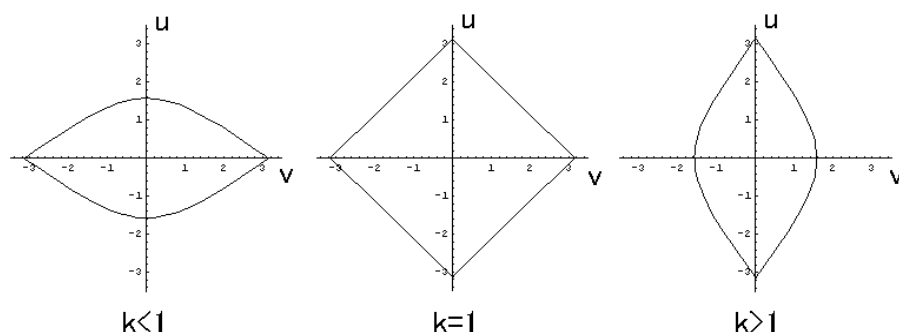


図 5.1: Harper 写像の微分方程式極限 $\sigma \rightarrow 0$ 極限でのセパトリックスの様子

摂動解であることを表す。

$$v_0(t) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n v_{0n}(t), \quad u_0(t) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n u_{0n}(t)$$

この漸近級数は、 $t = -\infty$ を含むセクターでは不安定多様体 $(v_u(t), u_u(t))$ を、 $t = \infty$ を含むセクターでは、安定多様体 $(v_s(t), u_s(t))$ を表す。なお、摂動解は発散級数であり、形式的な意味しか持たないことを注意しておく。この展開式を (4.5) に代入して、 σ について展開し、辺々 σ^k の係数を比較することより、帰納的に (v_{0n}, u_{0n}) の微分方程式系が得られる。例えば、 (v_{00}, u_{00}) は (4.6) の境界条件

$$(v_{00}(t), u_{00}(t)) \rightarrow (\pi, 0), \text{ as } t \rightarrow -\infty,$$

を満たす解のひとつは

$$\begin{aligned} v_{00}(t) &= -2 \tan^{-1} \left[\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t \right], \\ u_{00}(t) &= 2 \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{k}}{-\sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t + \cosh \sqrt{k}t} \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

である。この関数は、 $T \equiv \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{1+\sqrt{k}}{\sqrt{1-k}} > 0$ とおくとき、

$$t = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi i, \quad 2T + \frac{1}{\sqrt{k}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi i, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.2)$$

に特異点を持つ。特異点近くでの摂動解の振舞いを調べよう。特異点列のうち実軸に最も近く、虚数成分が正のものは2つ存在するが、そのうち実成分が0の方を t_1 、正の方を t_2 とおく (図 5.2)。

摂動の各次数の解の $t = t_1$ における発散の仕方をみるために、 $w \equiv t - t_1$ を用いると、 $|w|$ が小さい時、

$$\begin{aligned} v_{00} &= i \log \left(\frac{kw}{2} \right) + O(w), \\ u_{00} &= -i \log \left(\frac{kw}{2} \right) + O(w), \\ v_{01} &= 0, \\ u_{01} &= -\frac{i}{2} \frac{1}{w} + \frac{i(k-1)}{4} + \frac{i(k^2 + \frac{2}{3}k - 1)}{8} w + \dots, \end{aligned} \quad (5.3)$$

となる。さらに、帰納法を用いると (v_{0n}, u_{0n}) ($n \geq 1$) が $w = 0$ に n 次の極を持つ。また、摂動解が任意の t で発散するため、漸近級数としての意味しかもたない。不安定多様体は解析的なので、この漸近展開は特異点近くでは非常に大きな誤差を持つ。これが、Melnikov 摂動法の問題点であり、注意深い解析が必要な理由である。対数発散する v_{00} , u_{00} を引い

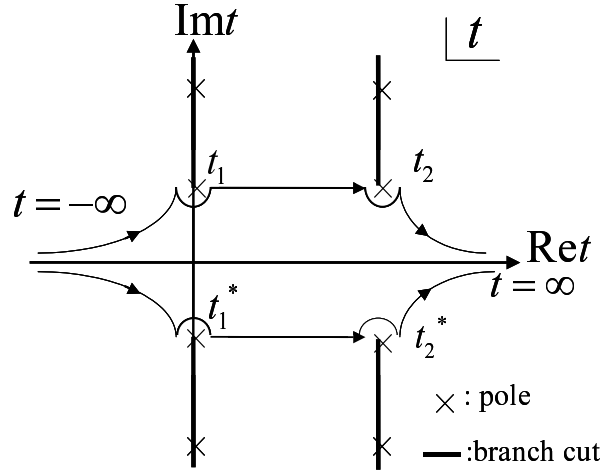


図 5.2: v_0, u_0 の時間複素面における特異性。特異点 (×), ブランチカット (太線)

て、摂動の各次の解から発散の強い順に項を抜き出してその和をみてみよう。このためには、次のスケール変数 z と内部解 $V_0(z, \sigma), U_0(z, \sigma)$ を考えればよい。

$$z \equiv \frac{w}{\sigma}$$

$$\begin{pmatrix} V_0(z, \sigma) \\ U_0(z, \sigma) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v_0(t, \sigma) \\ u_0(t, \sigma) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{00}(t) \\ u_{00}(t) \end{pmatrix} \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} V_{0n}(z) \\ U_{0n}(z) \end{pmatrix} \sigma^n \quad (5.4)$$

すると、次の展開式が得られる。

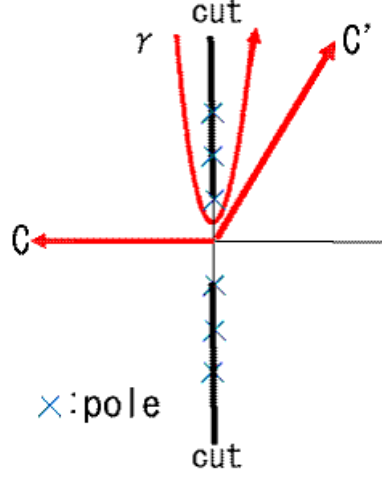
$$\begin{aligned} V_{00}(z) &\asymp \frac{i}{12z^2} - \frac{107i}{4320z^4} + O\left(\frac{1}{z^5}\right) \\ U_{00}(z) &\asymp -\frac{i}{2z} + \frac{i}{24z^2} + \frac{i}{24z^3} - \frac{191i}{8640z^4} + O\left(\frac{1}{z^5}\right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

ここで、摂動解の各次の t_1 周りでの発散が最も強い項の和が、 $\begin{pmatrix} V_{00}(z) \\ U_{00}(z) \end{pmatrix}$ に、 n 番目に発散の強い項の和が $\begin{pmatrix} V_{0n}(z) \\ U_{0n}(z) \end{pmatrix}$ に対応している。注目すべき点は、この級数が実軸の負の半直線を含むあるセクターで有効な漸近級数となることである。このため、内部解を実軸正の半直線を含むあるセクターに解析接続することにより、全時間領域での振舞いが取り出せると考えられる¹。これから見ていくように、実際にこのプログラムを遂行することができる。これが Borel 変換の方法のエッセンスである。

解析接続は Borel 和を用いて行う。 V_{0n} のうちの z に関して負冪項の和を V_{0n}^- とする。同様に、 U_{0n} のうちの z に関して負冪の項の和を U_{0n}^- とおく。 V_{0n}^- の Borel 変換 $\tilde{V}_n(p) \equiv B[V_{0n}^-(z)]$ が $t = -\infty$ を含む領域で収束するようにするよう、ラプラス変換 L を、

$$V_{0n}^-(z, \sigma) \equiv \int_0^{-\infty} dp e^{-pz} \tilde{V}_n(p) \equiv L(V_{0n}^-(z)) , \quad (5.6)$$

¹ もちろん、漸近級数を与えただけでは関数を定義したことにはならない。 (V_{0k}, U_{0k}) の正確な定義は次節で行う。

図 5.3: p 平面における、極とカットの様子

で定める。詳細は後述するが \tilde{V}_n の方程式は元の写像から求めることができ、例えば、 $t = t_1$ 近傍では、 $(\tilde{V}_0, \tilde{U}_0)$ の方程式は次式ようになる。

$$\begin{aligned} -i(e^{-p} - 1)\tilde{V}_0(p) &= 1 + \int_0^p dp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n \tilde{U}_0^{(*n)}(p)}{n!} \right\} - \frac{1 - e^{-p}}{p} \\ i(1 - e^p)\tilde{U}_0(p) &= 1 + \int_0^p dp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \tilde{V}_0^{(*n)}(p)}{n!} \right\} - \frac{e^p - 1}{p} \end{aligned} \quad (5.7)$$

ここで、 $\tilde{V}_0(p)^{(*n)}$ は $\tilde{V}_0(p)$ の n 回合成積である。まず、この式から \tilde{V}_0, \tilde{V}_1 が $p = \pm 2\pi i$ に特異点を持つことがわかる。また、 z の負冪は Borel 面では p の正冪に変換されるから、 $\tilde{V}_0(p), \tilde{U}_0(p)$ は p の正冪に展開して解くことができ、 p に関して有限の収束領域をもった級数が得られる。なお、 $p = 2\pi in$ ($n \in \mathbb{Z}/\{0\}$) に特異点が存在するのは、差分演算子の Laplace 変換が $e^p - 1$ であるためで、写像系で広く現れる性質である。Borel 変換の解析性については、Hénon 写像が唯一厳密に議論された例であり、 $[\pm 2\pi i, \pm i\infty]$ を除く星型領域における解析性が Chernov により示された [148]。その後、Gelfreich-Sauzin は虚数軸の特異点以外の全ての領域で解析的になることを示した [126]。さて、 $V_{0n}^-(z)$ を $\text{Re} z < 0$ から $\text{Re} z > 0$ に解析接続することを考えよう。これは、図 5.3 にあるように、 p 平面での積分経路を C から C' に変えることにより実行できる。積分経路は、 z 平面で下半平面を經由して接続するように時計回りにとる。この解析接続により、 $\text{Re} z > 0$ では極とカットを囲む積分 $-\int_{\gamma} dp e^{-pz} \tilde{V}_0(p)$ が付け加えられる。特異点 $p = 2\pi in$ から生じる付加項は (4.5) を次の様な摂動展開で解いた際の、 $V_n(n \geq 1)$ にあたる：

$$V(z, \sigma) \equiv v(t, \sigma) - v_{00}(t) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} V_n(z, \sigma) e^{-2\pi in}$$

$$U(z, \sigma) \equiv u(t, \sigma) - u_{00}(t) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z, \sigma) e^{-2\pi i n z} \quad (5.8)$$

さらに、各項を

$$\begin{aligned} V_n(z, \sigma) &\asymp \sum_{j=0}^{\infty} V_{nj}(z) \sigma^j, \\ U_n(z, \sigma) &\asymp \sum_{j=0}^{\infty} U_{nj}(z) \sigma^j, \end{aligned} \quad (5.9)$$

と展開しよう。但し、各 V_{nj} は z で展開した際に正幂の項を有限項しかもたない。 z に関して正幂の項は p -平面の極から、負幂の項は p -平面のカットから生じている。 V_n, U_n は V_0, U_0 の γ 上の積分から求まる。

これまで議論した内部解を、元の写像の適切な解に接続しよう。内部解 (U, V) の展開 (5.8) に対応し、 $\text{Re} t > 0$ で外部解は次の様に展開される。

$$\begin{aligned} v &\asymp v_0(t, \sigma) + v_1(t, \sigma) e^{-\frac{2\pi i}{\sigma} t} + v_2(t, \sigma) e^{-\frac{4\pi i}{\sigma} t} + \dots \\ u &\asymp u_0(t, \sigma) + u_1(t, \sigma) e^{-\frac{2\pi i}{\sigma} t} + u_2(t, \sigma) e^{-\frac{4\pi i}{\sigma} t} + \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

ここで、 (v_n, u_n) の方程式は、上式を (4.5) に代入し、 $e^{-\frac{2\pi i n i}{\sigma} t}$ の同じ幂の項を比べることで導かれる。例えば (v_1, u_1) は次式を満たす。

$$\begin{aligned} \Delta v_1(t) &= -\sigma u_1(t) \cos u_0(t) \\ \Delta u_1(t) &= k \sigma v_1(t + \sigma) \cos v_0(t + \sigma) \end{aligned} \quad (5.11)$$

最後に、 $\begin{pmatrix} v_n e^{-\frac{2\pi i n i}{\sigma} t} \\ u_n e^{-\frac{2\pi i n i}{\sigma} t} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} V_n e^{-2\pi i n z} \\ U_n e^{-2\pi i n z} \end{pmatrix}$ を $z = \infty$ を含むセクターで一致させることにより、外部解 $(v_n(t, \sigma), u_n(t, \sigma))$ を得る。この方法により、時間全平面で有効な不安定多様体の解が次の様に得られる。

$$\begin{aligned} v_u(t) &= v_{00}(t) + \sigma^2 v_{02}(t) \\ &\quad + S(t) \text{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(1)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_1}{\sigma}} x_2(t) e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] \\ &\quad + S(t - 2T) \text{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(2)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_2}{\sigma}} \left\{ \left(\frac{T(k-1)^2 - (1+k)}{4k(k-1)} \right) x_1(t) + x_2(t) \right\} e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] \\ u_u(t) &= u_{00}(t) + \sigma \frac{y_1(t)}{2} + \sigma^2 u_{02}(t) + \sigma^3 \left(\frac{1}{2} u'_{02}(t) - \frac{1}{24} y_1''(t) \right) \\ &\quad + S(t) \text{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(1)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_1}{\sigma}} \left(y_2(t) + \sigma \frac{y_2'(t)}{2} \right) e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] \\ &\quad + S(t - 2T) \text{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(2)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_2}{\sigma}} \left\{ \left(\frac{T(k-1)^2 - (1+k)}{4k(k-1)} \right) \left(y_1(t) + \sigma \frac{y_1'(t)}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(y_2(t) + \sigma \frac{y_2'(t)}{2} \right) \right\} e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] \end{aligned}$$

ここで、 $S(t)$ はステップ関数で、 (v_{00}, u_{00}) は (5.1) で、他の補助関数は以下で定義される。

$$\begin{aligned} v_{02}(t) &= -\frac{1}{24} \left[x'_1(t) + x_1(t) \left\{ kt - 2\sqrt{k} \frac{(\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t)(\cosh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t)}{(1+k) \cosh^2 \sqrt{k}t - 2\sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t \cosh \sqrt{k}t} \right\} \right] \\ u_{02}(t) &= \frac{1}{24} \left[2y'_1(t) - y_1(t) \left\{ kt - 2\sqrt{k} \frac{(\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t)(\cosh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t)}{(1+k) \cosh^2 \sqrt{k}t - 2\sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t \cosh \sqrt{k}t} \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -2\sqrt{k} \frac{-\sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t + \cosh \sqrt{k}t}{1 + \left(\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t \right)^2} \\ y_1(t) &= -2k \frac{\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t}{1 + \left(\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t \right)^2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\frac{1}{4k} \left(\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t \right) + \frac{1+k}{4\sqrt{k}} \frac{\cosh \sqrt{k}t}{1 + \left(\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t \right)^2} \\ &\quad + \frac{1-k}{8k} \left(t - \frac{i\pi}{2\sqrt{k}} \right) x_1(t) \\ y_2(t) &= \frac{1}{4\sqrt{k}} \left(\cosh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t \right) + \frac{1+k}{4\sqrt{k}} \frac{\cosh \sqrt{k}t}{1 + \left(\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t \right)^2} \\ &\quad + \frac{1-k}{8k} \left(t - \frac{i\pi}{2\sqrt{k}} \right) y_1(t) \end{aligned} \quad (5.14)$$

係数 $\Lambda^{(1)}$ 、 $\Lambda^{(2)}$ は数値的に決定され、

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= i4\pi^3 A_1 + \sigma\pi^3 \left\{ -(k-1)B_2 - \frac{kt_1+1}{12}B_4 \right\}, \\ \Lambda^{(2)} &= -i4\pi^3 A_1 + \sigma\pi^3 \left\{ -(k-1)B_2 + \frac{kt_2-1}{12}B_4 \right\}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

となる。但し、 $A_1 = 0.27893$, $B_2 = 0.14$, $B_4 = 3.503$ 。この解に基づくリコネクション転移の解析は、§ 5.7 で論じる。

5.2 Melnikov の摂動法

この節から ABAO について詳細に説明していこう。まず、Melnikov 摂動法による解の分析から始める。摂動解を v_0, u_0 とおく。これは、次の様に σ に関するべき級数で展開される形式級数である。

$$v_0(t) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n v_{0n}(t), \quad u_0(t) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n u_{0n}(t)$$

厳密に言えば、級数は、有限項 σ^{N-1} で打ち切った場合に、領域 $D \equiv \{\operatorname{Re}(t - t_1) < \sigma, 0 \leq \operatorname{Im}t \leq \operatorname{Im}t_1, \arg(t - t_c) \leq -\delta\}$ において不安定多様体 $(v_u(t), u_u(t))$ を誤差 $\operatorname{const} \cdot (1 +$

$\frac{1}{|t-t_1|^N})\sigma^N$ で近似する漸近級数である。この展開式を (4.5) に代入することにより、次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sigma^{n+m} \frac{d^n v_m^{(0)}(t)}{dt^n} &= -\sigma \sin \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sigma^m u_m^{(0)}(t) \right) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sigma^{n+m} \frac{d^n u_m^{(0)}(t)}{dt^n} &= k\sigma \sin \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma^{n+m}}{m!} \frac{d^m v_m^{(0)}(t)}{dt^m} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

このとき v_{00} , u_{00} の従う方程式は微分方程式極限 (4.6 と同じものになる。摂動による補正項を考えるため、低次の項が満たす方程式を具体的に書き下すと、 $O(\sigma)$ で、

$$\begin{aligned} v'_{01}(t) + \frac{1}{2}v''_{00}(t) &= -u_{01}(t) \cos u_{00}(t), \\ u'_{01}(t) - \frac{1}{2}u''_{00}(t) &= kv_{01}(t) \cos v_{00}(t), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$O(\sigma^2)$ で、

$$\begin{aligned} v'_{02}(t) + \frac{1}{2}v''_{01}(t) + \frac{1}{6}v'''_{00}(t) &= -u_{02}(t) \cos u_{00}(t) + \frac{u_{01}^2(t)}{2} \sin u_{00}(t), \\ u'_{02}(t) - \frac{1}{2}u''_{01}(t) + \frac{1}{6}u'''_{00}(t) &= k \left[v_{02}(t) \cos v_{00}(t) - \frac{v_{01}^2(t)}{2} \sin v_{00}(t) \right], \end{aligned} \quad (5.18)$$

となる。(4.6) の解 v_{00} , u_{00} は、前述したように 3 種類のセパトリックスを持つ。 $k < 1$ の場合の不安定多様体が構成できれば、系の対称性より、 $k > 1$ の場合の議論は可能であるので (Appendix F)、本研究では、 $k \neq 1$ の場合について議論し、特に、 $k \rightarrow 1 - 0$ の極限における不安定多様体の様子を調べる。

前述したように、 $2T \equiv \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{1+\sqrt{k}}{\sqrt{1-k}} > 0$ を一方の特異点の実部とすると $v_{00}(T) = 0$ 及び $|v_{00}(t)|, |u_{00}(t)| < \infty (t \rightarrow \infty)$ の条件を課すと、 $k < 1$ で $(-\pi, 0)$ と $(\pi, 0)$ を接続するセパトリックス

$$\begin{aligned} v_{00}(t) &= -2 \tan^{-1} \left[\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t \right], \\ u_{00}(t) &= 2 \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{k}}{-\sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t + \cosh \sqrt{k}t} \right], \end{aligned} \quad (5.19)$$

が求まり、 $t = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi i$, $2T + \frac{1}{\sqrt{k}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi i$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ に特異点をもつ。他方、 $k = 1$ で v_{00} , u_{00} を、

$$\begin{aligned} v_{00}(t) &= 2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{1 + \tanh t}{1 - \tanh t}} \right], \\ u_{00}(t) &= 2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{1 - \tanh t}{1 + \tanh t}} \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

と選べば、特異点は

$$t = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi i,$$

に位置する。 $\lim_{k \rightarrow 1-0} T = \infty$ であるから、 $k < 1$ の側から $k = 1$ におけるリコネクション転移を議論する目的では、 $k \rightarrow 1-0$ の極限で $k = 1$ の場合と特異点の位置が一致するように時間原点を選ぶのが便利である。 $v_{00}(T) = 0$ はこの条件を満たす初期条件の選び方の1つである。なお、 $v_{00}(0) = 0$ と $v(t)$ が奇関数になるような対称性の良い初期条件を選ぶと、 $k \rightarrow 1-0$ で、2特異点系列の実部が $\pm\infty$ に発散するため、 $k = 1$ の特異性を再現しない。初期条件については § 5.6 で詳しく議論する。

高次項 $\begin{pmatrix} v_{0k}(t) \\ u_{0k}(t) \end{pmatrix}$ ($k \geq 1$) を決めるに条件が2つ必要である。1つは、不安定多様体の漸近級数であることから、

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \begin{pmatrix} v_{0k}(t) \\ u_{0k}(t) \end{pmatrix} = 0 ,$$

であり、もう1つは、 (v_{00}, u_{00}) の時同様、初期時刻の条件である。§ 5.6 で議論するように $v_{0k}(T) = 0$ とすると、 $k \rightarrow 1-0$ 、 $\text{Re} t > 0$ で、後述する Stokes Multiplier の発散がおこる。そこで、 $v_0(T) = O(\sigma^2)$ を満たす不安定多様体の解析を行うことにする。すると、時間複素平面で (v_{00}, u_{00}) と同様

$$t = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi i, \quad 2T + \frac{1}{\sqrt{k}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi i, \quad T = \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{1 + \sqrt{k}}{\sqrt{1-k}} > 0 \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5.21)$$

に特異点を持つ。まず、初期条件 $v_{01}(T) = 0$ を満たす不安定多様体の摂動の1次項は

$$\begin{bmatrix} v_{01}(t) \\ u_{01}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

である。但し、上式中の補助関数 x_1, y_1, x_2, y_2 は § 5.1 の (5.13)、(5.14) で定義される。不安定多様体を考えており、 $|x_2|, |y_2| \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \pm\infty$) なので、 $b = 0$ となる。また、 $v_{01}(T) = 0$ とすると、 $a = \frac{1}{4}$ であるので、

$$v_{01}(t) = 0, \quad u_{01}(t) = \frac{1}{2} y_1(t), \quad (5.23)$$

が得られる。摂動の2次の解は、 $|v_{0k}|, |v_{0k}| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \pm\infty$) を満たす解のうち以下のものを選ぶ。

$$\begin{aligned} v_{02}(t) &= -\frac{1}{24} \left[x_1'(t) + x_1(t) \left\{ kt - 2\sqrt{k} \frac{(\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t)(\cosh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t)}{(1+k) \cosh^2 \sqrt{k}t - 2\sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t \cosh \sqrt{k}t} \right\} \right] \\ u_{02}(t) &= \frac{1}{24} \left[2y_1'(t) - y_1(t) \left\{ kt - 2\sqrt{k} \frac{(\sinh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \cosh \sqrt{k}t)(\cosh \sqrt{k}t - \sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t)}{(1+k) \cosh^2 \sqrt{k}t - 2\sqrt{k} \sinh \sqrt{k}t \cosh \sqrt{k}t} \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

詳しくは、§ 5.6 で論じるが、このとき、 $v_{02}(T) = 0$ となることを注意しておく。

5.3 内部方程式の導出

本章では、摂動解をその特異点付近で評価するため内部方程式を導入する。摂動展開の各項は、§ 5.2 でも議論したように、時間複素平面上で虚軸に平行に2列の特異点系列をも

つ (図 5.2)。

$$t = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi i, \quad 2T + \frac{1}{\sqrt{k}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi i, \quad T = \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{1 + \sqrt{k}}{\sqrt{1-k}} > 0$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.25)$$

実軸に最も近く上半面にある、 $t_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{k}} \left\{ \log \frac{1-\sqrt{k}}{\sqrt{1-k}} + \frac{1}{2} \pi i \right\}$ 及び $t_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{k}} \left\{ \log \frac{1+\sqrt{k}}{\sqrt{1-k}} + \frac{1}{2} \pi i \right\}$ 付近の摂動解の振舞いを解析しよう。まずは、 $t = t_1$ における振る舞いについて調べる。摂動の 1 次の解 (5.23) の Laurent 展開は次式で与えられる。

$$v_{01} = 0$$

$$u_{01} = -\frac{i}{2} \frac{1}{(t-t_1)} + \frac{i(k-1)}{4} + \frac{i(k^2 + \frac{2}{3}k - 1)}{8} (t-t_1) \dots \quad (5.26)$$

帰納法により、 $\begin{pmatrix} v_{0n} \\ u_{0n} \end{pmatrix} (n \geq 1)$ は $t = t_1$ に n 位の極を持つことがわかるので、

$$v_{0n}(t) = \frac{a_1^{(n)}}{(t-t_1)^n} + \frac{a_2^{(n)}}{(t-t_1)^{n-1}} + \dots,$$

$$u_{0n}(t) = \frac{b_1^{(n)}}{(t-t_1)^n} + \frac{b_2^{(n)}}{(t-t_1)^{n-1}} + \dots, \quad (5.27)$$

と書ける。そして、 $t = t_1$ で対数発散する v_{00}, u_{00} を除いた項は次の様に表せる。

$$v_0(t, \sigma) - v_{00}(t) \asymp \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{l+1}^{(n)}}{(t-t_1)^{n-l}} \sigma^n$$

$$u_0(t, \sigma) - u_{00}(t) \asymp \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_{l+1}^{(n)}}{(t-t_1)^{n-l}} \sigma^n \quad (5.28)$$

このとき、 $b_l^{(2n+1)} = 0$ であること、また、 $a_k^{(0)}, b_k^{(0)}$ が純虚数であることが証明できる。(5.27) より摂動の高次項は $t = t_1$ で発散するがその発散は摂動の次数が大きくなるほど強い。

摂動解は任意の t で発散するため、漸近級数としての意味しかもたない。漸近級数を $N-1$ 次で打ち切った時の誤差は領域 $D \equiv \{\text{Re}(t-t_1) < \sigma, 0 \leq \text{Im}t \leq \text{Im}t_1, \arg(t-t_c) \leq -\delta\}$ 上で、 $\text{const} \cdot \left(1 + \frac{1}{|t-t_1|^N}\right) \sigma^N$ となるから ([109, 111, 115] の standard map の摂動解の評価のテクニックを用いる) 有限項で打ち切った漸近級数は特異点に近づくにつれ、より大きな誤差を持つ。このために真の解は、他のセクターでは異なった形の級数を持ち、その差が解析接続により導出されることが期待できる (実際、後でこれを示す)²。この振舞いを調べるためには、特異点周りの挙動を拡大する変数 $z \equiv \frac{t-t_1}{\sigma}$ を用いるのが便利である。 z と σ を用いると、 $v_0(t, \sigma) - v_{00}(t), u_0(t, \sigma) - u_{00}(t)$ は次のように展開される。

$$V_0(z, \sigma) \equiv v_0(t, \sigma) - v_{00}(t) \asymp \sum_{l=0}^{\infty} V_{0l}(z) \sigma^l$$

² ABAO 法では、この解析接続の論法ではなく、特異点に近い領域では、内部方程式が真の多様体に近いことを用いて議論を行う。

$$U_0(z, \sigma) \equiv u_0(t, \sigma) - u_{00}(t) \asymp \sum_{l=0}^{\infty} U_{0l}(z) \sigma^l \quad (5.29)$$

もちろん、上の等号は形式級数としての意味しかもたないし、 V_{0l} , U_{0l} を定義したことにはならない。正確には、 V_{0l} , U_{0l} は、後述するように (5.32) から生成される方程式群 (5.33)(5.34)⋯ の解のうち、 $z = -\infty$ を含むセクターで漸近級数：

$$\begin{aligned} V_{0l}(z) &\asymp \sum_{n=1}^{\infty} a_{l+1}^{(n)} \frac{1}{z^{n-l}}, \\ U_{0l}(z) &\asymp \sum_{n=1}^{\infty} b_{l+1}^{(n)} \frac{1}{z^{n-l}}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

を持つものとして定義される。(5.30) が示すように、 V_{00} , U_{00} は摂動の各次数の発散の最も強い項を足し合わせたものであり、 V_{0l} , U_{0l} は、摂動の各時数の特異点付近で l 番目に発散が強い項を足し合わせものである。これが、 z, σ を変数として元の写像を書き換える理由のひとつある。但し、 V_{00} , U_{00} には Melnikov 摂動の全ての次数からの寄与が含まれているため、 z^{-n} の係数は完全に決定することは難しく、 $n \rightarrow \infty$ における係数の発散の速さのみが解析的に議論できる。

さて、 V_{0l}, U_{0l} を、きちんと定義しよう。 $V(z, \sigma)$, $U(z, \sigma)$ を

$$\begin{aligned} V(z, \sigma) &\equiv v(t_c + \sigma z, \sigma) - v_{00}(t_c + \sigma z), \\ U(z, \sigma) &\equiv u(t_c + \sigma z, \sigma) - u_{00}(t_c + \sigma z), \end{aligned} \quad (5.31)$$

とすると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta V(z, \sigma) &= -\sigma [\sin U(z, \sigma) \cos u_{00}(t_c + \sigma z) + \cos U(z, \sigma) \sin u_{00}(t_c + \sigma z)] \\ &\quad - \Delta v_{00}(t_c + \sigma z) \\ \Delta U(z-1, \sigma) &= k\sigma [\sin V(z, \sigma) \cos v_{00}(t_c + \sigma z) + \cos V(z, \sigma) \sin v_{00}(t_c + \sigma z)] \\ &\quad - \Delta u_{00}(t_c + \sigma(z-1)) \end{aligned} \quad (5.32)$$

ここで Δ は差分を表すオペレーターで、 $\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$ で定義される。(5.32) を内部方程式と呼ぶ。この方程式の σ についての摂動解を V_0 , U_0 と表記する。(5.29) を (5.32) に代入し、

$$\begin{aligned} v_{00} &= i \log\left(\pm \frac{kz}{2} \sigma\right) \pm i \frac{k-1}{2} z \sigma + i \frac{k^2 - \frac{2}{3}k - 1}{8} (z\sigma)^2 + \cdots, \\ u_{00} &= \mp i \log\left(\frac{kz}{2} \sigma\right) + i \frac{k-1}{2} z \sigma \pm i \frac{k^2 + \frac{2}{3}k - 1}{8} (z\sigma)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

を用いると、 V_{0l} , U_{0l} が従う方程式を得る。最初の2つを下に記す。

$$\begin{aligned} \Delta V_{00}(z) &= i \frac{e^{-iU_{00}(z)}}{z} - i \log\left(1 + \frac{1}{z}\right) \\ \Delta U_{00}(z) &= -i \frac{e^{iV_{00}(z+1)}}{z+1} \pm i \log\left(1 + \frac{1}{z}\right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_{01}(z) &= \left[i \frac{k-1}{2} + \frac{U_{01}(z)}{z} \right] e^{-iU_{00}(z)} - \frac{i}{2}(k-1) \\
\Delta U_{01}(z) &= \left[\frac{V_{01}(z+1)}{z+1} - i \frac{1-k}{2} \right] e^{iV_{00}(z+1)} + \frac{i}{2}(1-k)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

V_{0l}, U_{0l} はこのようにして生成される方程式群の解のうち、 $z = -\infty$ を含むセクターで摂動解の漸近級数と形式的に一致するものと定めることによって、一意的に定義される。

前述したように、各次数の摂動解の方程式の斉次項は $1/z$ から始まり、 $1/z$ 項の係数は $t = t_1$ における Melnikov の摂動解の留数を用いて決定される。

$$\text{Res} \left(\frac{V_{0k}(z)}{U_{0k}(z)} \right) \Big|_{z=0} = \text{Res} \left(\frac{v_{0k+1}(t)}{u_{0k+1}(t)} \right) \Big|_{t=t_1} \tag{5.35}$$

漸近級数 (5.30) は、微分方程式の組を解くことにより構成することも可能であるが、内部方程式 (5.32) を (5.29) で形式展開することにより得られる方程式群：(5.33)、(5.34)・・・を $\mathbb{C}[z][[z^{-1}]]$ のクラスで解く方が容易である。但し、 $\mathbb{C}[z][[z^{-1}]]$ を z の有限の多項式と $1/z$ の級数の和で表される formal 級数の空間とする。このようにして求めた、低次項の具体形は以下の様になる。

$$\begin{aligned}
V_{00}(z) &\asymp \frac{i}{12z^2} - \frac{107i}{4320z^4} + O\left(\frac{1}{z^5}\right) \\
U_{00}(z) &\asymp -\frac{i}{2z} + \frac{i}{24z^2} + \frac{i}{24z^3} - \frac{191i}{8640z^4} + O\left(\frac{1}{z^5}\right)
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}
V_{01}(z) &\asymp -\frac{i}{24} \frac{kt_1 + 1}{z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \\
U_{01}(z) &\asymp \frac{i(k-1)}{4} + \frac{i}{24} \frac{k(t_1 + 1)}{z} - \frac{i}{48} \frac{k(t_1 + 1)}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)
\end{aligned} \tag{5.37}$$

後に示すように、 V_{0l} 及び U_{0l} は発散するが Borel 和が可能な発散級数で表される。特に、 $1/z^n$ の係数は、 n が十分大きい時は $n!$ の様に振舞い、摂動解は有限の $|z|$ では意味を失う。これが、Melnikov 摂動が適用できない理由である³。

5.4 内部方程式の解の性質

本節では、 V_{0l}, U_{0l} が発散級数であるが Borel 和が可能であることを示す。

5.4.1 Borel 和と解析接続

今は不安定多様体を構成しているので $t = -\infty$ を含むセクターで有効である Borel 変換を考える。 $V_{00}(z), U_{00}(z)$ の Borel 変換 \tilde{V}_0, \tilde{U}_0 は Laplace 変換 L を通して次のように定義さ

³ Melnikov 摂動でセパトリクス分裂が解析できる例も知られている。特に、[149] では、Melnikov 摂動が厳密解を与える場合を扱っている。また、Melnikov 摂動が適用可能である十分条件は [104] の § 5 に解説がある。

れる。

$$\begin{aligned} V_{00}(z) &\equiv L[\tilde{V}_0(p)](z) \equiv \int_0^{-\infty} dp e^{-pz} \tilde{V}_0(p) \\ U_{00}(z) &\equiv L[\tilde{U}_0(p)](z) \equiv \int_0^{-\infty} dp e^{-pz} \tilde{U}_0(p) \end{aligned} \quad (5.38)$$

このとき、 \tilde{V}_0 , \tilde{U}_0 は次式に従うことがわかる。

$$\begin{aligned} -i(e^{-p} - 1)\tilde{V}_0(p) &= 1 + \int_0^p dp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n \tilde{U}_0^{(*n)}(p)}{n!} \right\} - \frac{1 - e^{-p}}{p} \\ i(1 - e^p)\tilde{U}_0(p) &= 1 + \int_0^p dp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \tilde{V}_0^{(*n)}(p)}{n!} \right\} - \frac{e^p - 1}{p} \end{aligned} \quad (5.39)$$

ここで、 $\tilde{V}_0^{(*n)}$ は V_0 の n 回合成積で次式で定義される。

$$\tilde{V}_0^{(*n)}(p) = \int_0^p dx \tilde{V}_0(p-x) \tilde{V}_0^{(*n-1)}(x) \quad (5.40)$$

$\text{Re} z < 0$ では $1/z^n$ の Borel 変換 $B[1/z^n](p)$ は、

$$\frac{p^{n-1}}{(n-1)!} = B \left[\frac{1}{z^n} \right], \quad (5.41)$$

であり、その結果、 V_{00} , U_{00} の Borel 変換 \tilde{V}_0 , \tilde{U}_0 は、 p 平面の特定の領域で収束する。この Laplace 変換を全平面に解析接続することにより $\text{Re} z > 0$ で有効な漸近解が得られる。不安定多様体の $t \rightarrow \infty$ での振舞いを調べるためには、 $V_{00}(z)$, $U_{00}(z)$ の $\text{Re} z < 0$, $\text{Im} z < 0$ から $\text{Re} z > 0$ への解析接続を行わなければならない。これは、Fig 5.3 に示してあるように p 平面上で積分経路を C から C' に移すことによって可能となる。図には \tilde{V}_0 , \tilde{U}_0 の極と分岐点の位置も記す。

積分の収束領域を反時計回りに回転し、 z について特異点の下を経由して接続しなければならないので、積分経路は時計回りに $\frac{\pi}{2}$ [rad] より大きく回転させなければならない。そして、 $\text{Re} z < 0$, $\text{Im} z < 0$ から $\pi + \epsilon < \arg z < 2\pi + \epsilon$ への解析接続は次の様に与えられる。

$$\int_0^{-\infty} dp e^{-pz} \tilde{V}_0(p) \rightarrow \int_0^{-\infty e^{i(\pi/2+\epsilon)}} dp e^{-pz} \tilde{V}_0(p) - \int_{\gamma} dp e^{-pz} \tilde{V}_0(p) \quad (5.42)$$

ここで ϵ は任意の小さい実数である。

内部方程式を解き、上の方法に従って解析接続を行えば、 $t = \infty$ を含むセクターで有効な漸近解を得ることができるが、Harper 写像の内部方程式を解析的に解くことは極めて困難であり、 $\tilde{V}_0(p)$ の持つ p 平面での特異性について知ることは難しい。以下に述べる Alien derivative の方法は、この特異性を定数を除き決定する。

内部方程式の解の形式級数展開を構成し、その Borel 変換に $-e^{-pz}$ をかけたものを γ に沿って積分する演算を考えよう。すなわち、 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ を $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}(p) = \frac{a_{n+1}}{n!} p^n$ が有限の

収束半径を持つような級数であるとする⁴、Alien Derivative \mathcal{D}_A は、

$$D_A f(z) = - \int_{\gamma} dp e^{-pz} \tilde{V}_0(p) ,$$

として定義される線形演算である。

この演算を具体的に実行することは困難であるが、この演算は微分の性質を満たすので、
 $-\int_{\gamma} dp e^{-pz} \tilde{V}_0(p)$, $-\int_{\gamma} dp e^{-pz} \tilde{U}_0(p)$ は、内部方程式 (5.32) を線形化した、

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(z) &= -\sigma (\Psi(z) \cos U_0(z) \cos u_{00}(t_c + \sigma z) - \Psi(z) \sin U_0(z) \sin u_{00}(t_c + \sigma z)) , \\ \Delta \Psi(z-1) &= k\sigma (\Phi(z) \cos V_0(z) \cos v_{00}(t_c + \sigma z) - \Phi(z) \sin V_0(z) \sin v_{00}(t_c + \sigma z)) , \end{aligned} \quad (5.43)$$

を満たす。上式は 2 階の差分方程式であるから未定定数を 2 つ含む一般解を持つ。

$-\int_{\gamma} dp e^{-pz} \tilde{V}_0(p)$, $-\int_{\gamma} dp e^{-pz} \tilde{U}_0(p)$ より、 $\tilde{V}_0(p)$, $\tilde{U}_0(p)$ を逆算すれば、 $p = \pm 2\pi i$ における特異性はこの定数を除き決定される。この未定定数については、次節以降で、数値的に決めていく。

5.4.2 $\tilde{V}_0(p)$, $\tilde{U}_0(p)$ の決定

本節では、前節で示した方法に従って、 $\tilde{V}_0(p)$, $\tilde{U}_0(p)$ を導出する。Gelfreich による Standard map の線形化方程式の解の構成のテクニック [115] を用いると、次の定理を得る。

定理 1

領域 D_C を $D_C \equiv \{z \in \mathbf{C} : \text{Im} z \leq -C \ (C > 1), -\pi + \delta \leq \arg z \leq -\delta\}$ で定義する。Harper 写像を考え、不安定多様体 $(V_u(z), U_u(z))$ の $z \rightarrow -\infty$ における漸近級数と、安定多様体 $(V_s(z), U_s(z))$ の $z \rightarrow \infty$ における漸近級数が一致するように両多様体をパラメータ付けする。このとき、 $(V_u(z) - V_s(z), U_u(z) - U_s(z))$ は、 D_C 上で漸近級数 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n w_n^V \right)$ を持つことが言える。このとき、 $\{\Lambda_n^A\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\Lambda_n^B\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して、 w_n^V , w_n^U は

$$\begin{pmatrix} w_n^V \\ w_n^U \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^n \left\{ \Lambda_{n-k}^A \begin{pmatrix} V_{1k}^A(z) \\ U_{1k}^A(z) \end{pmatrix} + \Lambda_{n-k}^B \begin{pmatrix} V_{1k}^B(z) \\ U_{1k}^B(z) \end{pmatrix} \right\} e^{-i2\pi z} + O(e^{-i4\pi(1-\delta)z}) , \quad (5.44)$$

に D_C 上で一様収束する。ここで、 C, δ は任意の定数であり、誤差項は、 C, δ, n に依存する。なお、 $U_{1k}^\alpha(z)$, $V_{1k}^\alpha(z)$, $(\alpha = A, B)$ は整関数であり、次の条件で定義される。

- formal 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \begin{pmatrix} V_{1n}^\alpha(z) \\ U_{1n}^\alpha(z) \end{pmatrix}$, $(\alpha = A, B)$ は、(5.32) の形式解である。

⁴ $f(z)$ は発散級数となりえる。 $\tilde{f}(p)$ が有限の収束半径を持つとき、 $f(z)$ の係数は Gebrey-1 bound であると呼ばれる。

- $\begin{pmatrix} V_{1n}^A(z) \\ U_{1n}^A(z) \end{pmatrix}$ は、 D_C 上で次の漸近級数で展開される。

$$\begin{pmatrix} V_{1n}^A(z) \\ U_{1n}^A(z) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_{nk}^V \\ a_{nk}^U \end{pmatrix} \frac{1}{z^{n+1}} \quad (5.45)$$

- $\begin{pmatrix} V_{1n}^B(z) \\ U_{1n}^B(z) \end{pmatrix}$ は、 D_C 上で次の漸近級数で展開される。

$$\begin{pmatrix} V_{1n}^B(z) \\ U_{1n}^B(z) \end{pmatrix} = \sum_{k=-n-1}^{\infty} \begin{pmatrix} b_{nk}^V \\ b_{nk}^U \end{pmatrix} \frac{1}{z^k}, \quad \{b_{n,-1}^V = 0 \ (n \geq 0), \ b_{n,1}^V = 0 \ (n \geq 1)\} \quad (5.46)$$

定理 1 に現れる Λ_n^α を今後、Stokes Multiplier と呼ぶことにする [150]。

上の定理における安定・不安定多様体の差は、不安定多様体を $\operatorname{Re} z < 0$ から $\operatorname{Re} z > 0$ に解析接続した時に付加される項に対応する。これより、 $-e^{2\pi iz} \int_{\gamma} dp e^{-pz} \tilde{V}_0(p)$, $-e^{2\pi iz} \int_{\gamma} dp e^{-pz} \tilde{U}_0(p)$ は、(5.43) で $\sigma = 0$ とした方程式の 2 つの独立解 $(V_{10}^A(z), U_{10}^A(z))$, $(V_{10}^B(z), U_{10}^B(z))$ の線形結合でかける。それらの D_C 上、 $|z| = \infty$ における漸近級数の具体形は、 $\mathbf{C}[z][[z^{-1}]]$ で解けば良いから、以下ようになる。

$$V_{10}^A(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{6z^3} + \cdots, \quad U_{10}^A(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{12z^3} + \cdots, \quad (5.47)$$

$$V_{10}^B(z) = z - \frac{1}{540z^3} + \cdots, \quad U_{10}^B(z) = z + \frac{1}{2} + \frac{1}{12z} - \frac{1}{24z^2} + \frac{11}{2160z^3} + \cdots \quad (5.48)$$

従って、 \hat{V}_A , \hat{U}_A を

$$-\int_{\gamma} dp e^{-pz} \begin{pmatrix} \hat{V}_\alpha(p) \\ \hat{U}_\alpha(p) \end{pmatrix} = e^{-2\pi iz} \begin{pmatrix} V_{10}^\alpha(z) \\ U_{10}^\alpha(z) \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

と定義すると、例えば、

$$\tilde{V}_A(p) = \frac{1}{2\pi i} \ln(p - 2\pi i) + \cdots, \quad (5.50)$$

$$\tilde{V}_B(p) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(p - 2\pi i)^2} + \cdots, \quad (5.51)$$

となる。これを用いると、 \tilde{V}_0 は、

$$\tilde{V}_0(p) = \Lambda_0^A \hat{V}_A(p) + \Lambda_0^B \hat{V}_B(p) + \cdots \quad (5.52)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{\Lambda_0^B}{(p - 2\pi i)^2} + \Lambda_0^A \ln(p - 2\pi i) \right\} + \cdots, \quad (5.53)$$

と表される。前述したように、 $V_{00}(z)$ を $1/z$ で展開した際の係数は純虚数となっており、 $\tilde{V}_0(p)$ は p が実数の時、純虚数である。この性質から、 $\tilde{V}_0(p)$ は、

$$\begin{aligned} \tilde{V}_0(p) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{\Lambda_0^B}{(p - 2\pi i)^2} + \frac{\Lambda_0^{B*}}{(p + 2\pi i)^2} + \Lambda_0^A \ln(p - 2\pi i) + \Lambda_0^{A*} \ln(p + 2\pi i) \right\} + \cdots \\ &= \operatorname{Re} \Lambda_0^B f_1^{(R)}(p) + \operatorname{Im} \Lambda_0^B f_1^{(I)}(p) - \operatorname{Re} \Lambda_0^A f_{-1}^{(R)}(p) - \operatorname{Im} \Lambda_0^A f_{-1}^{(I)}(p) + \cdots, \end{aligned} \quad (5.54)$$

となる。ここで、(5.54) 中の補助関数は、

$$\begin{aligned} f_j^{(R)}(p) &= \frac{j!}{2\pi i} \left(\frac{1}{(p-2\pi i)^{j+1}} + \frac{1}{(p+2\pi i)^{j+1}} \right), \quad (j=0, 1, 2, \dots) \\ f_j^{(I)}(p) &= \frac{j!}{2\pi} \left(\frac{1}{(p-2\pi i)^{j+1}} - \frac{1}{(p+2\pi i)^{j+1}} \right), \quad (j=0, 1, 2, \dots) \\ f_{-1}^{(R)}(p) &= \frac{i}{2\pi} [\ln(p-2\pi i) + \ln(p+2\pi i)], \\ f_{-1}^{(I)}(p) &= -\frac{1}{2\pi} [\ln(p-2\pi i) - \ln(p+2\pi i)], \end{aligned}$$

で定義される。また、(5.54) では、 $p = \pm 2\pi i$ での特異性がより弱い項および、 $p = \pm 2\pi i$ で解析的な項は省略した。なお、 $f_{lj}^{(\alpha)}(p)$ ($\alpha = I, R$, $l, j = 0, 1, 2, \dots$) は

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma} dp e^{-pz} f_{lj}^{(R)}(p) &= z^j e^{-2\pi l i z}, \\ - \int_{\gamma} dp e^{-pz} f_{lj}^{(I)}(p) &= i z^j e^{-2\pi l i z}, \end{aligned}$$

を満たし、 $|p| < 2\pi$ で級数展開可能で、その係数は純虚数となる。実際、(5.54) のマクローリン級数は、

$$\begin{aligned} \tilde{V}_0(p) &= M + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{i\text{Im}\Lambda_0^B}{4\pi^3}(2n+2) + \frac{i\text{Im}\Lambda_0^A}{\pi(2n+1)} \right\} (-1)^n \left(\frac{p}{2\pi} \right)^{2n+1} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{i\text{Re}\Lambda_0^B}{4\pi^3}(2n+1) + \frac{i\text{Re}\Lambda_0^A}{2\pi n} \right\} (-1)^n \left(\frac{p}{2\pi} \right)^{2n}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

であり、確かに収束半径は 2π である。ここで、 $M = -\frac{i\text{Im}\Lambda_0^A}{4} + \frac{i\text{Re}\Lambda_0^B}{4\pi^3} - \frac{i\text{Re}\Lambda_0^A}{2\pi} \log(4\pi^2)$ とした。同様に、 $\tilde{U}(p)$ のマクローリン級数は、以下の形を持つ。

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{i\text{Im}\Lambda_0^B}{4\pi^3}(2n+2) - \frac{i\text{Im}(\Lambda_0^A + \Lambda_0^B/12)}{\pi(2n+1)} + \frac{i\text{Re}\Lambda_0^B}{4\pi^2} \right\} (-1)^n \left(\frac{p}{2\pi} \right)^{2n+1} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{i\text{Re}\Lambda_0^B}{4\pi^3}(2n+1) - \frac{i\text{Re}(\Lambda_0^A + \Lambda_0^B/12)}{2\pi n} - \frac{i\text{Im}\Lambda_0^B}{4\pi^2} \right\} (-1)^n \left(\frac{p}{2\pi} \right)^{2n} \\ &\quad + M', \end{aligned} \quad (5.56)$$

但し、 $M' = M + \frac{i\text{Im}(2\Lambda_0^A + \Lambda_0^B/12)}{4} - \frac{i\text{Im}\Lambda_0^B}{4\pi^2}$ である。

前節に述べたように、未定定数 Λ_0^A , Λ_0^B は (5.56) を (5.39) の数値解と比較して、定める。そこで、

$$\tilde{V}_0(p) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \quad \tilde{U}_0(p) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^n, \quad \left(a_0 = 0, \quad b_0 = -\frac{i}{2} \right)$$

を (5.39) に代入し再帰的に解くと、 a_n , b_n は、以下の漸近形を持つことがわかる。

$$i a_{2n+1} (-1)^n (2\pi)^{2n+1} \rightarrow -(2n+2)A_1 + \frac{A_2}{2n+1} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$ia_{2n} = 0 \quad (\forall n) \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} ib_{2n+1}(-1)^n(2\pi)^{2n+1} &\rightarrow -(2n+2)A_1 + \frac{A_2}{2n+1} \quad (n \rightarrow \infty) \\ ib_{2n}(-1)^n(2\pi)^{2n} &\rightarrow A_3 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (5.58)$$

但し、 $A_1 = 0.27893$, $A_2 = 0.417$, $A_3 = 0.87628$ である。(5.55) を (5.57) と、(5.56) を (5.58) と比較し、 Λ_0^A 、 Λ_0^B が、

$$\Lambda_0^B = 4\pi^3 i A_1, \quad \Lambda_0^A + \frac{\Lambda_0^B}{12} = -\Lambda_0^A = \pi i A_2, \quad \Lambda_0^B = 4\pi^2 i A_3, \quad (5.59)$$

を満たすことがわかる。(5.59) の 1 番目と 3 番目の等式より、 $A_3/A_1 = \Lambda_0^B/\Lambda_0^A = \pi$ でなければならないが、数値計算の結果は、 $A_3/A_1 = 3.1416$ となっており、 A_1 , A_3 の計算精度が高いことを裏付けている。同様にして、1 番目、2 番目の等式より $(6A_2)/(\pi^2 A_1) = 1$ が要求されるが、 $(6A_2)/(\pi^2 A_1) = 0.909$ となっており、精度は 1 桁程度である。これは、 A_1 , A_3 が n のオーダーの項の係数であるのに比べ、 A_2 は $1/n$ のオーダーの項の係数であるため、 A_2 の評価が A_1 の誤差に大きく影響されることによる⁵。これまで \tilde{V}_0 , \tilde{U}_0 の冪級数展開の展開係数について、 n に関し 3 つの主要項 (それぞれ n , n^0 , $1/n$ 程度の項) のみを考慮してきた。ところが、 \tilde{V}_0 , \tilde{U}_0 の漸近級数は $f_{lj}^{(I)}(p)$ ($j \leq -2$;) や $f_{lj}^{(I)}(p)$ ($l \geq 2$;) と言った項を含むはずである。これらの項の影響について調べよう。 $f_{lj}^{(\lambda)}(p)$ ($\lambda = I \text{ or } R$) の大きさは、

$$\begin{aligned} f_{lj}^{(\lambda)}(p) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2(2\pi l)^n} p^n, & (j \leq -2) \\ f_{lj}^{(\lambda)}(p) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^j}{(2\pi l)^n} p^n, & (j \geq -1) \end{aligned}$$

と評価できるので、 $f_{lj}^{(\lambda)}$ を展開した際の p^n の係数の絶対値を $[f_{lj}^{(\lambda)}]_n$ とおけば、 n が十分大きい時、次の大小関係があると考えられる。

$$[f_{11}^{(\lambda)}]_n \gg [f_{10}^{(\lambda)}]_n \gg [f_{1,-1}^{(\lambda)}]_n \gg [f_{20}^{(\lambda)}]_n \cdots \quad (5.60)$$

従って、 \tilde{V}_0 , \tilde{U}_0 を評価する際に無視した $f_{lj}^{(I)}(p)$ ($j \leq -2$) 及び $f_{lj}^{(I)}(p)$ ($l \geq 2$) の寄与は今回行った数値計算では十分小さく、無視することができる。尚、(5.60) の大小関係は z 平面に戻した時、 $f^{(\alpha)}_{lj}$ に起因する項の $|z|$ が十分大きい時の大小関係に一致することに注意して欲しい。なお、 $\text{Im}(t - t_c) < 0$ のとき、

$$\frac{\sigma^n}{(t - t_c)^n} \gg e^{\frac{-2\pi i(t-t_c)}{\sigma}},$$

であり、右辺は σ に関して全てのオーダーを超えて小さい量なので、 $e^{-2\pi iz}$ は任意の n について a/z^n より十分小さいと考えることができ、対応する p 平面での項の (5.60) の意味

⁵ (5.57) からわかるように、 $1/(2n+1)$ の係数 A_2 は、 n のオーダーの項 $-(2n+2)A_1$ を取り除いた後にフィッティングして求めなければならない。ところが、(5.57) から $-(2n+2)A_1$ を引いて、 $A_2/(2n+1)$ とマッチングすることは $o(1/n)$ からの項も寄与するためうまくいかない。そこで、 $a_{2n+1}(-1)^n(2\pi)^{2n+1}$ 、 $b_{2n+1}(-1)^n(2\pi)^{2n+1}$ の $1/(2n+1)$ に比例する項が A_1 の選び方によらないことを数値的に確認し、(5.59) の 2 式目が成立する条件から A_2 を求めた。

の大小関係と一致する。

$$\frac{1}{z^n} \gg e^{-2\pi iz}$$

以上まとめれば、 $\tilde{V}_0(p)$ 、 $\tilde{U}_0(p)$ の $p = \pm 2\pi i$ における特異性は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\tilde{V}_0(p) &= -\frac{\Lambda_0^A}{i} f_{-1}^{(I)}(p) + \frac{\Lambda_0^B}{i} f_1^{(I)}(p) \\ \tilde{U}_0(p) &= -\frac{\Lambda_0^A}{i} f_{-1}^{(I)}(p) + \frac{\Lambda_0^B}{i} \left(f_1^{(I)}(p) - \frac{1}{2} f_0^{(I)}(p) \right)\end{aligned}\quad (5.61)$$

この評価は \tilde{V}_0 、 \tilde{U}_0 を p で展開して解いた際の漸近的振舞いのみを表しているため、もちろん p の正則項はこの評価では良く記述されない。ところが、不安定多様体のセクターを変えた際に生じる項は、 \tilde{V}_0 、 \tilde{U}_0 の特異性のみが本解析では重要である。従って、 \tilde{V}_0 、 \tilde{U}_0 の正則項の振舞いを良く捉えていないことは、実際上は問題ではない。

5.4.3 内部方程式の高次解

本節では、Melnikov 摂動解の高次項の接続について考える。 $V_{0n}(z)$ 、 $U_{0n}(z)$ における z に関して負べきの項を $V_{0n}^-(z)$ 、 $U_{0n}^-(z)$ とおき、その $z = -\infty$ を含むセクターでの Borel 変換を $\tilde{V}_n(p)$ 、 $\tilde{U}_n(p)$ とおこう。定理 1 より、不安定多様体は、 $z = +\infty$ を含むセクターでは、

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} dp e^{-pz} \begin{pmatrix} \tilde{V}_n(p) \\ \tilde{U}_n(p) \end{pmatrix} = e^{-2\pi iz} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \begin{pmatrix} V_{1n}(z) \\ U_{1n}(z) \end{pmatrix} + \cdots, \quad (5.62)$$

のように表される付加項を持つ。 $-\text{Im}z \gg 0$ で、 $e^{-2\pi iz}$ に対して指数的に小さい項（つまり、 $e^{-ip_c z}$ ($p_c > 2\pi$) のオーダーの項）は省略した。定理 1 を適用した後、 $\tilde{V}_0(p)$ 、 $\tilde{U}_0(p)$ の構成に用いたテクニックを使うと⁶、 σ に比例する項 $V_{11}(z)$ および $U_{11}(z)$ は、

$$\begin{pmatrix} V_{11}(z) \\ U_{11}(z) \end{pmatrix} = \Lambda_0^A \begin{pmatrix} V_{11}^A(z) \\ U_{11}^A(z) \end{pmatrix} + \Lambda_0^B \begin{pmatrix} V_{11}^B(z) \\ U_{11}^B(z) \end{pmatrix} + \Lambda_1^A \begin{pmatrix} V_A(z) \\ U_A(z) \end{pmatrix} + \Lambda_1^B \begin{pmatrix} V_B(z) \\ U_B(z) \end{pmatrix}, \quad (5.63)$$

と表されることがわかる。但し、 $V_{11}^\alpha(z)$ 、 $U_{11}^\alpha(z)$ ($\alpha = A, B$) は、

$$\begin{aligned}\Delta V_{11}^\alpha(z) &= \frac{U_{11}^\alpha(z) + \frac{k-1}{2} z U_\alpha(z)}{z} e^{-iU_{00}(z)} - i \frac{U_\alpha(z) U_{01}(z)}{z} e^{-iU_{00}(z)}, \\ \Delta U_{11}^\alpha(z-1) &= \frac{V_{11}^\alpha(z) + \frac{1-k}{2} z V_\alpha(z)}{z} e^{iV_{00}(z)} + i \frac{V_\alpha(z) V_{01}(z)}{z} e^{iV_{00}(z)}\end{aligned}\quad (5.64)$$

に従い、 $V_{11}^\alpha(z)$ ($\alpha = A, B$) の漸近級数は z 、 $1/z$ を含まない。よって、 $|z| \rightarrow \infty$ で漸近的に、

$$\begin{pmatrix} V_{11}(z) \\ U_{11}(z) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \Lambda_1^B z + \frac{k-1}{6} \Lambda_0^B z^2 \\ \Lambda_1^B z - \frac{k-1}{6} \Lambda_0^B (z^2 + z) \end{pmatrix}, \quad (5.65)$$

となる。ここで、 z^{-m} ($m \geq 0$) のオーダーの項は無視した⁷。

⁶ 前節では (5.62) において $\sigma = 0$ としたものをを用いた

⁷ 無視した項の決定は、 \tilde{V}_1 、 \tilde{U}_1 の級数解の係数において n^2 が主要項となる時の $1/n$ の項を数値的に見積もれる場合に関り、可能である。ところが、この数値計算は困難であり、現解析においては、残しておいても意味がない。

未定定数については前節で議論した $V_{00}(z)$ 、 $U_{00}(z)$ の場合と同じく、(5.34) を数値的に解くことにより定める。Appendix H で議論するように、 $V_{01}(z)$ 、 $U_{01}(z)$ の負べき部分は、

$$\begin{pmatrix} V_{01}^-(z) \\ U_{01}^-(z) \end{pmatrix} = i \left\{ \frac{kt_1 + 1}{24} \begin{pmatrix} V_{10}^A(z) \\ U_{10}^A(z) \end{pmatrix} + \frac{k-1}{2} \begin{pmatrix} V_{10}^B(z) - z \\ U_{10}^B(z) - (z - \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \right\}, \quad (5.66)$$

と表されるので、 $\begin{pmatrix} V_{10}^A \\ U_{10}^A \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} V_{10}^B \\ U_{10}^B \end{pmatrix}$ を数値的に解くことにより、 $V_{01}(z)$ 、 $U_{01}(z)$ が定まり、これから未定定数 Λ_1^A 、 Λ_1^B が決まる (Appendix G 参照)。

$\begin{pmatrix} V_{10}^\alpha(z) \\ U_{10}^\alpha(z) \end{pmatrix}$ ($\alpha = A, B$) の定義から明らかに、これらの Borel 変換は p が実数の時、実数値をとる。他方で、(5.65) より、 $\tilde{V}_1(p)$ 、 $\tilde{U}_1(p)$ は $p = 2\pi i$ で、2 位の極を持ち、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_1(p) \\ \tilde{U}_1(p) \end{pmatrix} = -4\pi^4(k-1)B_1 f_2^{(I)}(p) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\frac{kt_1 + 1}{12} \pi^3 B_4 + (k-1)\pi^3 B_2 \right) f_1^{(R)}(p) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \pi^3(k-1)B_3 f_1^{(I)}(p) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

これより、 $V_{11}(z)$ 、 $U_{11}(z)$ は、

$$\begin{pmatrix} V_{11}(z) \\ U_{11}(z) \end{pmatrix} = 4\pi^4 i(k-1)B_1 z^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\frac{kt_1 + 1}{12} \pi^3 B_4 + (k-1)\pi^3 B_2 \right) z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \pi^3 i(k-1)B_3 z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.68)$$

となる。ここで、 B_1 から B_4 は、 V_{10}^A 、 U_{10}^A 、 $V_{10}^B - z$ 、 $U_{10}^B - z - 1/2$ の Borel 変換の $p = \pm 2\pi i z$ における特異性から求められ、以下の値をとる (Appendix G)。

$$B_1 = 0.01480, \quad B_2 = 0.14, \quad B_3 = 0.186, \quad B_4 = 3.503 \quad (5.69)$$

さて、(5.68) を (5.65) に代入すると次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \Lambda_0^B &= 24\pi^4 i B_1 = 6\pi^3 i B_3 \\ \Lambda_1^B &= -(k-1)\pi^3 B_2 - \frac{kt_1 + 1}{12} \pi^3 B_4 \end{aligned} \quad (5.70)$$

(5.70) で与えられる Λ_0^B は前節で与えられた値と矛盾してはならない。すなわち、 $\frac{A_1}{6\pi B_1}$ 、 $\frac{2A_1}{3\pi B_3}$ が 1 になるべきである。実際、

$$\frac{A_1}{6\pi B_1} = 0.99987 \simeq 1, \quad \frac{2A_1}{3\pi B_3} = 0.99974 \simeq 1,$$

となるので、この数値計算の精度は十分信頼に足る。以上より、 $\tilde{V}_1(p)$ 、 $\tilde{U}_1(p)$ は、

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1(p) &= i \frac{\Lambda_0^B(k-1)}{6} f_2^{(I)}(p) + \Lambda_1^B f_1^{(R)}(p), \\ \tilde{U}_1(p) &= -i \frac{\Lambda_0^B(k-1)}{6} \left(f_2^{(I)}(p) - f_1^{(I)}(p) \right) + \Lambda_1^B f_1^{(R)}(p), \end{aligned} \quad (5.71)$$

となる。5.4.1–5.4.3 で行った、alien derivative を用いた解析手法は Resurgence 理論と呼ばれ、写像系のみならず、常微分方程式、偏微分方程式など幅広く応用されている [125]。

5.4.4 付与項の漸近級数

前節までで、Resurgence 理論を用いて V_{00} 、 U_{00} 、 V_{01} 、 U_{01} の Borel 変換の関数形を V_{10} 、 U_{10} 、 V_{11} 、 U_{11} から未定定数 Λ_0^A 、 Λ_0^B 、 Λ_1^A 、 Λ_1^B を除いて決定した。その後、 V_{00} 、 U_{00} 、 V_{01} 、 U_{01} の級数の漸近形を数値的に求める事により、 Λ_0^A 、 Λ_0^B 、 Λ_1^B を得た⁸。その結果、 $V(z, \sigma)$ 、 $U(z, \sigma)$ は $z = +\infty$ を含むセクターでは以下の様になることが判った。

$$\begin{pmatrix} V(z, \sigma) \\ U(z, \sigma) \end{pmatrix} \asymp \begin{pmatrix} V_{00}(z) + \sigma V_{01}(z) \\ U_{00}(z) + \sigma U_{01}(z) \end{pmatrix} + e^{-2\pi iz} \begin{pmatrix} V_{10}(z) + \sigma V_{11}(z) \\ U_{10}(z) + \sigma U_{11}(z) \end{pmatrix} + \dots \quad (5.72)$$

ここで、例えば、付加項の第 1 成分は、

$$V_{10}(z) + \sigma V_{11}(z) \approx -\frac{\Lambda_0^A}{z} + (\Lambda_0^B + \sigma \Lambda_1^B) \left(z + \sigma \frac{k-1}{6} z^2 \right),$$

である。

5.5 内部解と外部解のマッチング

5.5.1 $t = t_1$ における内部解と外部解のマッチング

本節では、 $t = t_1$ における、解のマッチングについて考える。前節で内部方程式の解を $z = +\infty$ を含むセクターに解析接続した。 $V = V_0 + e^{-2\pi iz} V_1 + \dots$ 、 $U = U_0 + e^{-2\pi iz} U_1 + \dots$ を元の変数に戻すには、 v 、 u を次の様に展開すればよい。

$$\begin{aligned} v(t, \sigma) &\asymp v_0(t, \sigma) + v_1(t, \sigma) e^{-\frac{2\pi i}{\sigma} t} + v_2(t, \sigma) e^{-\frac{4\pi i}{\sigma} t} + \dots \\ u(t, \sigma) &\asymp u_0(t, \sigma) + u_1(t, \sigma) e^{-\frac{2\pi i}{\sigma} t} + u_2(t, \sigma) e^{-\frac{4\pi i}{\sigma} t} + \dots \end{aligned} \quad (5.73)$$

ここで、2 項目以降は、 $\text{Re } t = \text{Re } t_1$ 近傍で付け加わる項であり、後述するように、 v_k は v_{k-1} と比べると σ に関して指数的に小さい項 ($e^{\frac{2\pi i t_1}{\sigma}}$ 程度) になっている。従って、(5.73) は、 $e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}}$ を摂動パラメータとする一種の摂動展開とみなせ、各項の方程式は通常摂動同様 $e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}}$ の冪を比べることで導くことができる。 $e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}}$ に関して最低次の項が満たす方程式は次の通りである。

$$\begin{aligned} \Delta v_1(t) &= -\sigma u_1(t) \cos u_0(t) \\ \Delta u_1(t) &= k\sigma v_1(t + \sigma) \cos v_0(t + \sigma) \end{aligned} \quad (5.74)$$

但し、 Δ は $\Delta f(t) = f(t + \sigma) - f(t)$ で定義される差分演算子である。

内部解と外部解のマッチングには次の関係を用いる。

$$e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \begin{pmatrix} v_1(t, \sigma) \\ u_1(t, \sigma) \end{pmatrix} \Bigg|_{t=t_1+\sigma} \asymp e^{-2\pi iz} \begin{pmatrix} V_{10}(z) + \sigma V_{11}(z) + \dots \\ U_{10}(z) + \sigma U_{11}(z) + \dots \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

⁸ Λ_1^A は、精度上の問題から議論しなかった。

左辺を内部変数 z を用いて書き直せば、

$$\begin{pmatrix} v_1(t_1 + \sigma z, \sigma) \\ u_1(t_1 + \sigma z, \sigma) \end{pmatrix} \asymp e^{\frac{2\pi i t_1}{\sigma}} \begin{pmatrix} V_{10}(z) + \sigma V_{11}(z) + \cdots \\ U_{10}(z) + \sigma U_{11}(z) + \cdots \end{pmatrix}, \quad (5.76)$$

となる。これより、付加項は元の変数 t では、以下のような展開で与えられると考えられる。

$$v_1(t, \sigma) \asymp \sigma^j e^{\frac{2\pi i t_1}{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} v_{1n}(t) \sigma^n, \quad u_1(t, \sigma) \asymp \sigma^j e^{\frac{2\pi i t_1}{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(t) \sigma^n \quad (5.77)$$

後述するように、上式に現れる整数 j はマッチングの条件 (5.75) 及び各項の解の展開式から一意的に決まる。(5.77) を (5.74) に代入し、 σ の冪を比べると、 $v_{10}, u_{10}, v_{11}, u_{11}$ の微分方程式

$$\begin{aligned} v'_{10}(t) &= -u_{10}(t) \cos u_{00}(t), \\ u'_{10}(t) &= k v_{10}(t) \cos v_{00}(t), \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} v'_{11}(t) + \frac{1}{2} v''_{10}(t) &= -u_{11}(t) \cos u_{00}(t) + u_{10}(t) u_{01}(t) \sin u_{00}(t), \\ u'_{11}(t) - \frac{1}{2} u''_{10}(t) &= k (v_{11}(t) \cos v_{00}(t) - v_{10}(t) v_{01}(t) \sin v_{00}(t)), \end{aligned} \quad (5.79)$$

を得る。まずは、 v_{10}, u_{10} から決めていこう。 v_{10}, u_{10} は、(5.78) に従うから、一般解は

$$\begin{pmatrix} v_{10}(t) \\ u_{10}(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad (5.80)$$

である。但し、 $x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t)$ は (5.13)、(5.14) で定義される。従って、 σ^0 のオーダーまででは、マッチング条件 (5.76) は、

$$\begin{aligned} \sigma^j \begin{pmatrix} v_{10}(\sigma z + t_1) \\ u_{10}(\sigma z + t_1) \end{pmatrix} \Big|_{\sigma^0} &= \sigma^j \left\{ a \begin{pmatrix} x_1(\sigma z + t_1) \\ y_1(\sigma z + t_1) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x_2(\sigma z + t_1) \\ y_2(\sigma z + t_1) \end{pmatrix} \right\} \Big|_{\sigma^0} \\ &\approx \begin{pmatrix} V_{10}(z) + \sigma V_{11}(z) + \cdots \\ U_{10}(z) + \sigma U_{11}(z) + \cdots \end{pmatrix} \Big|_{\text{dom}} = \Lambda_0^B \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.81)$$

となる。ここで、下付きの σ^0 は σ^0 のオーダーの項のみをとることを意味し、‘dom’ は、 $z \rightarrow \infty$ の極限で最も大きくなる項のみをとることを意味する。(5.81) の左辺は z から始まるので、 $j = -1$ でなければならない。実際、 $v_{1n} (n \geq 1)$ の項から $\Lambda_0 z$ が得られるとすると、 $j = -(n+1)$ となる。ところが、帰納的に各項の特殊解の $\sigma z = 0$ における発散が強くなることが言えるため、 $v_{1,n-1}$ からは必ず σ の負冪が生じてしまう。従って、 v_{10} より、 $\Lambda_0 z$ が生じなければならないことになり、 $j = -1$ と言える。さらに、 v_{10} から σ の負冪が生じない条件から a, b は、

$$a = 0, \quad b = \frac{2\Lambda_0^B}{i},$$

となる。本論文では、 Λ_2^α を見積もっていないので $(v_{10}, u_{10}), (v_{11}, u_{11})$ の見積もりまでしか行えないが、 Λ_k^α が決まればこの論法により、次々と v_{1n}, u_{1n} が決まっていくことがわかる。結局、 σ の最低次まででは、

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ u_1(t) \end{pmatrix} \approx \frac{2\Lambda_0^B}{i\sigma} e^{-\frac{2\pi i(t-t_1)}{\sigma}} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad (5.82)$$

となる。同様にして、 σ の 1 次まででマッチング条件を考えれば、

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ u_1(t) \end{pmatrix} \approx \frac{2\Lambda^{(1)}}{i\sigma} e^{-\frac{2\pi i(t-t_1)}{\sigma}} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) + \sigma y'_2(t)/2 \end{pmatrix}, \quad (5.83)$$

を得る。但し、 $\Lambda^{(1)} \equiv \Lambda_0^B + \sigma \Lambda_1^B$ である。

5.5.2 $t = t_1^*$ からの寄与

これまでに、 $t = t_1$ 近傍におけるマッチング条件について考えてきた。 $\text{Re } t > \text{Ret}_1$ で有効な解を考えるためには、 $t = t_1^*$ から付与される項についても考慮する必要がある。これは、 $(v_0(t), u_0(t))$ が実解析的であることを考慮すると $t = t_1$ で付与される項の複素共役である (Appendix I を参照)。従って、 $t < \text{Ret}_2$ での不安定多様体は、

$$\begin{pmatrix} v_u(t) \\ u_u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{00}(t) + \sigma^2 v_{02}(t) \\ u_{00}(t) + \sigma \frac{y_1(t)}{2} + \sigma^2 u_{02}(t) + \sigma^3 \left(\frac{1}{2} u'_{02}(t) - \frac{1}{24} y''_1(t) \right) \end{pmatrix} \\ + S(t) \text{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(1)}}{i\sigma} e^{-\frac{2\pi i(t-t_1)}{\sigma}} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) + \sigma y'_2(t)/2 \end{pmatrix} \right], \quad (5.84)$$

となる。ここで、付加項は本来 $t = 0$ から急速に成長するなめらかな関数だが、本論文ではこの部分をステップ関数 $S(t)$ で近似した [124]。

5.5.3 他の特異点からの寄与

これまでに、 $t = t_1$ 、 $t = t_1^*$ の特異点の近傍で付与される項について検討した。本節では、

$$t \equiv t_2 = 2T + \frac{1}{\sqrt{k}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi i,$$

からの寄与について検討する。 $e^{-2\pi iz}$ までの評価では、形式級数を特異点の周りで解析した結果を単に足し合わせるだけで特異点の寄与を見積もってよいことが Gelfreich らにより指摘されている [151]。本論文でも、この結果を用いて漸近解を構成する。

$t = t_1$ 近傍の解析と同様にして、 $t = t_2$ で付与される項は、

$$\begin{pmatrix} V_{01}^-(z) \\ U_{01}^-(z) \end{pmatrix} = i \left\{ \frac{kt_2 - 1}{24} \begin{pmatrix} V_{10}^A(z) \\ -U_{10}^A(z) \end{pmatrix} + \frac{k-1}{2} \begin{pmatrix} -(V_{10}^B(z) - z) \\ U_{10}^B(z) - (z - \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \right\}, \quad (5.85)$$

$$\begin{pmatrix} v_1^{(2)}(t) \\ u_1^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(2)}}{i\sigma} e^{-\frac{2\pi i(t-t_2)}{\sigma}} \left\{ \frac{T(k-1)^2 - (1+k)}{4k(k-1)} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) + \sigma y'_1(t)/2 \end{pmatrix} \right. \right. \\ \left. \left. + \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) + \sigma y'_2(t)/2 \end{pmatrix} \right\} \right], \quad (5.86)$$

であることが言える。ここで、 $\Lambda^{(2)}$ は、 $\Lambda^{(2)} \equiv -i4\pi^3 A_1 + \sigma\pi^3 \left\{ -(k-1)B_2 + \frac{kt_2-1}{12}B_4 \right\}$ である。従って、 $t = t_1, t_2, t_1^*, t_2^*$ を考慮した全領域にわたる解は、以下で、与えられる。

$$\begin{aligned}
v_u(t) &= v_{00}(t) + \sigma^2 v_{02}(t) + S(t) \operatorname{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(1)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_1}{\sigma}} x_2(t) e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] \\
&\quad + S_+(t) \operatorname{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(2)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_2}{\sigma}} \left\{ \left(\frac{T(k-1)^2 - (1+k)}{4k(k-1)} \right) x_1(t) + x_2(t) \right\} e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] \\
u_u(t) &= u_{00}(t) + \sigma \frac{y_1(t)}{2} + \sigma^2 u_{02}(t) + \sigma^3 \left(\frac{1}{2} u'_{02}(t) - \frac{1}{24} y_1''(t) \right) \\
&\quad + S(t) \operatorname{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(1)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_1}{\sigma}} \left(y_2(t) + \sigma \frac{y_2'(t)}{2} \right) e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] \\
&\quad + S_+(t) \operatorname{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(2)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_2}{\sigma}} \left\{ \left(\frac{T(k-1)^2 - (1+k)}{4k(k-1)} \right) \left(y_1(t) + \sigma \frac{y_1'(t)}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \left(y_2(t) + \sigma \frac{y_2'(t)}{2} \right) \right\} e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] \quad (5.87)
\end{aligned}$$

ここで、 $S_+(t) = S(t-2T)$ である。最後に、安定多様体 $(v_s(t), u_s(t))$ は、不安定多様体の解を用いて $(-v_u(-t), u_u(-t))$ と表されるので、

$$\begin{aligned}
v_s(t) &= v_{00}(t) + \sigma^2 v_{02}(t) \\
&\quad - S(-t) \operatorname{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(1)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_1}{\sigma}} x_2(t) e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] \\
&\quad - S_+(-t) \operatorname{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(2)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_2}{\sigma}} \left\{ \left(\frac{T(k-1)^2 - (1+k)}{4k(k-1)} \right) x_1(t) + x_2(t) \right\} e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] , \\
u_s(t) &= u_{00}(t) + \sigma \frac{y_1(t)}{2} + \sigma^2 u_{02}(t) + \sigma^3 \left(\frac{1}{2} u'_{02}(t) - \frac{1}{24} y_1''(t) \right) \\
&\quad - S(-t) \operatorname{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(1)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_1}{\sigma}} \left(y_2(t) + \sigma \frac{y_2'(t)}{2} \right) e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] \\
&\quad - S_+(-t) \operatorname{Re} \left[\frac{4\Lambda^{(2)}}{i\sigma} e^{\frac{2\pi i t_2}{\sigma}} \left\{ \left(\frac{T(k-1)^2 - (1+k)}{4k(k-1)} \right) \left(y_1(t) + \sigma \frac{y_1'(t)}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \left(y_2(t) + \sigma \frac{y_2'(t)}{2} \right) \right\} e^{-\frac{2\pi i t}{\sigma}} \right] , \quad (5.88)
\end{aligned}$$

となる。

5.6 初期条件の選択についての考察

§ 4.1 で触れたように、初期条件をうまくとらないと Stokes Multiplier $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}$ がリコネクションパラメータに関して発散を起こす。本節では、この点について検討しよう。これまでは、 $v_0(T) = O(\sigma^2)$ という初期条件を選んだが、最も素朴に $v_{0k}(0) = 0$ と選ぶと、摂

動解は以下ようになる。

$$v_{00} = -2 \tan^{-1} \left[\sqrt{1-k} \sinh \sqrt{k} t \right] \quad (5.89)$$

$$u_{00} = 2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{k}{1-k}} \frac{1}{\cosh \sqrt{k} t} \right] \quad (5.90)$$

$$v_{01}(t) = 0 \quad (5.91)$$

$$u_{01}(t) = -k \sqrt{1-k} \frac{\sinh \sqrt{k} t}{1 + (1-k) \sinh^2 \sqrt{k} t} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} v_{02}(t) &= -\frac{1}{24} \left[\tilde{x}'_1(t) + \tilde{x}_1(t) \left(kt - 2(1-k) \frac{\sqrt{k} \tanh \sqrt{k} t}{1 - k \tanh^2 \sqrt{k} t} \right) \right] \\ u_{02}(t) &= \frac{1}{24} \left[2\tilde{y}'_1(t) - \tilde{y}_1(t) \left(kt - 2(1-k) \frac{\sqrt{k} \tanh \sqrt{k} t}{1 - k \tanh^2 \sqrt{k} t} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= -2\sqrt{k(1-k)} \frac{\cosh \sqrt{k} t}{1 + (1-k) \sinh^2 \sqrt{k} t} \\ \tilde{y}_1(t) &= -2k\sqrt{1-k} \frac{\sinh \sqrt{k} t}{1 + (1-k) \sinh^2 \sqrt{k} t} \end{aligned} \quad (5.94)$$

これらの関数は明らかに、

$$t = \frac{1}{\sqrt{k}} \left\{ \log \frac{1 \pm \sqrt{k}}{\sqrt{1-k}} + \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi i \right\} \equiv \pm T + \frac{1}{\sqrt{k}} \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi i, \quad (5.95)$$

に特異点を持ち、 $t = \pm T + \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{2} \pi i$ における Laurant 展開は、

$$\begin{aligned} v_{01} &= 0, \\ u_{01} &= \mp \frac{i}{2} \frac{1}{(t-t_c)} + \frac{i(k-1)}{4} + \dots, \end{aligned} \quad (5.96)$$

$$v_{02} = \frac{i}{12} \frac{1}{(t-t_c)^2} \mp \frac{i}{24} \frac{\pm kt_c + 1}{(t-t_c)} + \dots, \quad (5.97)$$

$$u_{02} = \pm \frac{i}{24} \frac{1}{(t-t_c)^2} + \frac{i}{24} \frac{\pm kt_c + 1}{(t-t_c)} + \dots, \quad (5.98)$$

となる。但し、 $t_c = \pm T + \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{2} \pi i$ であり、上の複合は $t = -T + \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{2} \pi i \equiv \tilde{t}_1$ 周りの、下の複合は $t = +T + \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{2} \pi i \equiv \tilde{t}_2$ 周りの Laurant 展開である。この時、例えば、 $t = \tilde{t}_1$ における Stokes Multiplier は、 t_1 を \tilde{t}_1 と置き換えれば得られるので、

$$\Lambda^{(1)} = 4\pi i A_1 + \sigma \pi^3 \left\{ -(k-1) B_2 - \frac{k\tilde{t}_1 - 1}{12} + O(\sigma^2) \right\}, \quad (5.99)$$

と求まり、 $k \rightarrow 1-0$ で発散する。 σ に依存しない任意の t_0 について $v_0(t_0) = 0$ と初期条件をとる限り Stokes Multiplier は不変なので、この発散は $v_0(t_0) = 0$ と初期条件をとった場合には必ず起こる。これは、 $v_{02}(T) = 0$ とした解：

$$v_{02}(t) = -\frac{1}{24} \left[x'_1(t) + x_1(t) \left(k(t-T) - 2(1-k) \frac{\sqrt{k} \tanh \sqrt{k}(t-T)}{1 - k \tanh^2 \sqrt{k}(t-T)} \right) \right],$$

$$u_{02}(t) = \frac{1}{24} \left[2y_1'(t) - y_1(t) \left(k(t-T) - 2(1-k) \frac{\sqrt{k} \tanh \sqrt{k}(t-T)}{1 - k \tanh^2 \sqrt{k}(t-T)} \right) \right], \quad (5.100)$$

から斉次解 $\frac{kT}{24} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ を引いた解を摂動項に用いることにより避けられる。これが、前節までの解析で用いた解である。なお、この解は $v_{02}(T) = -2\sqrt{k(1-k)}$, $u_{02}(T) = 0$ を満たすことに注意しておく。

本節の議論をまとめれば、 $v_{0k}(T) = 0$ と初期条件をとった場合には $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ の双方が発散するのに対し、本論文で扱った初期条件では、 $\Lambda^{(1)}$ の発散を $\Lambda^{(2)}$ におしつけたことになる。従って、解は $t < 2T$ で意味をもつ。

Standard map、Hénon 写像など特異点列が1列しかない系における先行研究では、 $v_{0k}(t_0) = 0$ ($k \geq 1$) と初期条件を選んで問題がない。本節の議論から、特異点列が複数ある系の解析では、初期条件の選び方に注意が必要ながわかる。

5.7 数値計算との比較と、不安定多様体のリコネクション

5.7.1 数値計算との比較

本節では、解析的な表式 (5.87) と数値計算を比較する。前節の解析から、 $t = 0, 2T$ 近傍で、指数的に小さい項が急成長することがわかり、それをステップ関数で近似したものが (5.87) である。この項は σ に関して指数的に小さいが、時間 t に関して指数成長するため、 t が大きいところで指数減衰する摂動項に代わり、主要項となる。この項が、homoclinic (heteroclinic) tangle を記述し、 $(-\pi, 0)$ 近傍の振動を表す。図 5.4 には、解析的な表式 (5.87) (実線) と、数値的に求めた軌道群を示す。図からわかるように、解析的な表式 (5.87) は、多様体の引き伸ばしを良く表しているが、多様体の折り畳みは再現していない。これは、次の様に理解できる可能性がある。これまでの議論では、不安定多様体は $z = +\infty$ をつなぐセクターに解析接続するとしていたが、数学的に厳密には、§ 5.4.2 の定理 1 で述べたように通常の摂動 (漸近級数) 解曲線と不安定多様体の差が指数的に小さな付与項で表されるのは、 $-\pi + \delta \leq \arg(t - t_c) \leq -\delta$ の領域に限られ $t = \infty$ を含む領域には広げることができない。すなわち、 t が $O(\delta^{-1})$ を超えて大きい領域では解析的な表式 (5.87) は有効でなくなる。折り畳みが顕著にでるのは、恐らくこの時間領域であり、本論文で用いた Borel 変換の方法で次数をいくらあげても折り畳みの再現は不可能である。実際、Borel 変換の方法で折り畳みが再現できないことは、簡単に説明ができる。すなわち、Stokes 線を越えて急成長する付与項は漸近級数であり、無限個の項を取り入れると、むしろ誤差は増大してしまう。ところが、有限個の項を取り入れたところで、 t が大きい領域ではロープの傾きが変わるだけで不安定多様体はほぼ直線で近似される。従って、折り畳みの再現には別の方法が必要であると考えられる。

図 5.5 には、 $(\pi, 0)$ の不安定多様体の $(-\pi, 0)$ 近傍での解析的な表式 (5.87) (赤線) と、この曲線上の $(v, u) = (-pi + 0.75^{-5}, 0.6 \times 10^{-5})$ 近傍に 500 個の 500 個の初期点を数値的に時間発展させたものを示す。右は左の拡大図である。

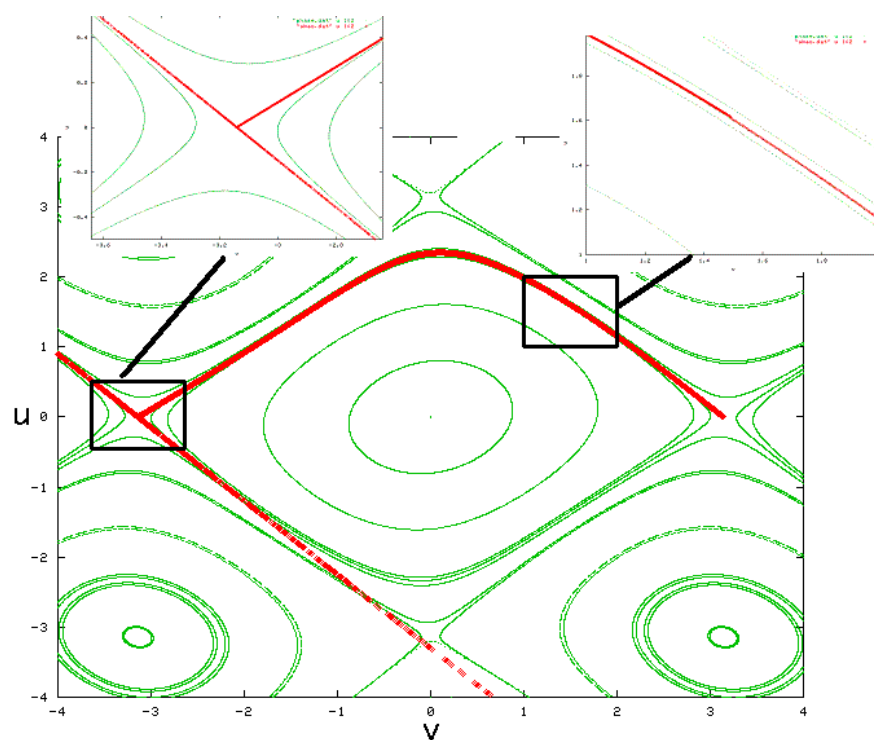


図 5.4: Borel 変換の方法によって構成された不安定多様体 (赤線) と数値的に構成した軌道群 ($\sigma = 0.35, k = 0.85$)。

図 5.5 から、解析的な表式 (5.87) が $(-\pi, 0)$ から離れた領域においても不安定多様体をよく近似することがわかる。比較のため、Stokes Multiplier の主要項のみ取り入れた場合の同様な図を、図 5.6 に載せる。図から、Stokes Multiplier のオーダーを増やすことで不安定多様体を近似できる時間領域が長くなることがわかる。

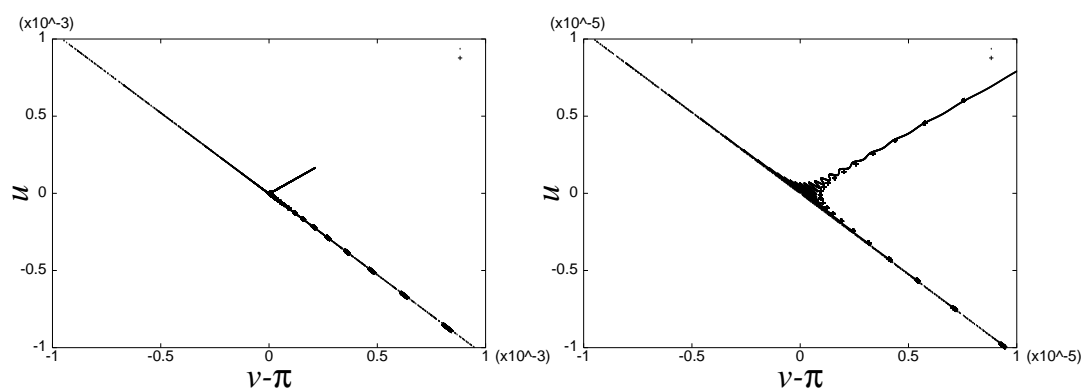


図 5.5: Borel 変換の方法によって構成された $(-\pi, 0)$ 近傍における不安定多様体 (実線) と、実線上、 $(v, u) = (-\pi + 0.75^{-5}, 0.6 \times 10^{-5})$ 近傍の 500 個の点 (+) を数値時間発展させたもの ($\sigma = 0.3, k = 0.85$)。

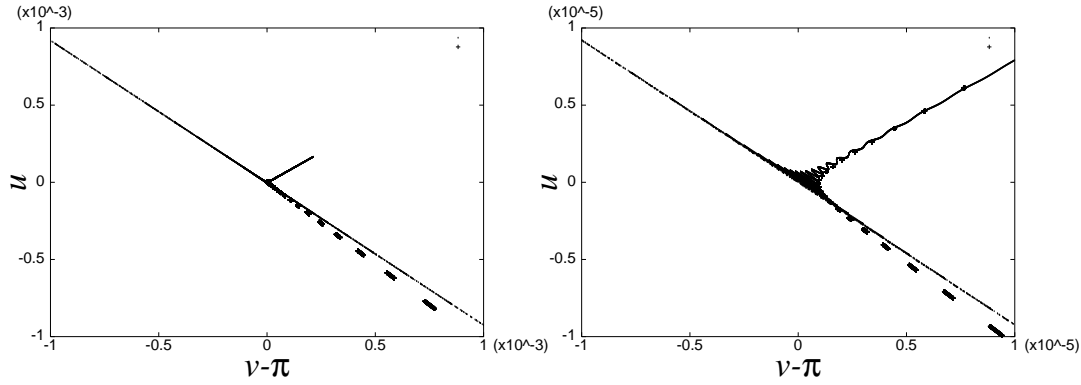


図 5.6: Borel 変換の方法によって構成された $(-\pi, 0)$ 近傍における不安定多様体 (実線) と、実線上、 $(v, u) = (-\pi + 0.75^{-5}, 0.6 \times 10^{-5})$ 近傍の 500 個の点 (+) を数値時間発展させたもの ($\sigma = 0.3, k = 0.85$)。Stokes multiplier の主要項のみ考慮した場合。

図 5.7、図 5.8 に、 $\sigma = 0.30$ の時の、 $k = 0.3, 0.85, 1.0 - 5.0 \times 10^{-11}$ における不安定多様体の様子を示す。明らかに、固定点 $(-\pi, 0)$ から遠い領域では、摂動解 (漸近級数) が不安定多様体をよく近似する。 $(-\pi, 0)$ 近傍では、不安定多様体が振動し、振動部分の傾きは k の増加とともに急になる。なお、解析的な表式によると、この傾きが

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u_1(t)}{v_1(t) + \pi} = -\sqrt{k} - \frac{k}{2}\sigma,$$

となっていることがわかる。

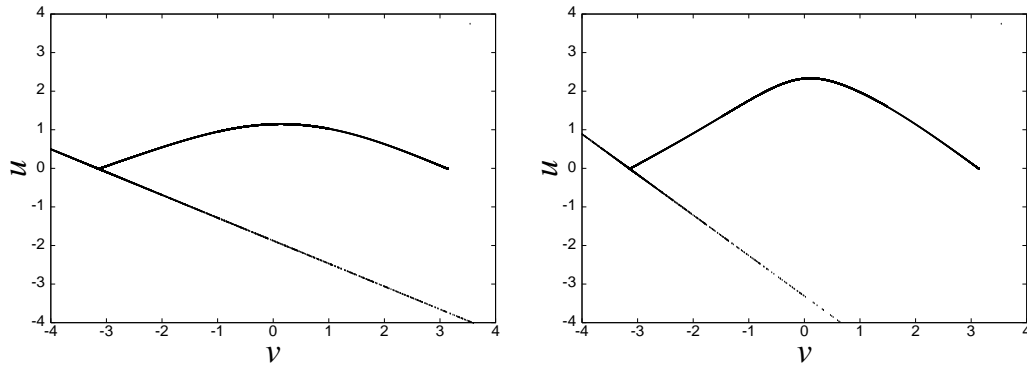


図 5.7: Borel 変換の方法によって構成された $(-\pi, 0)$ 近傍における不安定多様体 (実線)。左図は $\sigma = 0.3, k = 0.3$ の場合、右図は、 $\sigma = 0.3, k = 0.85$ の場合。

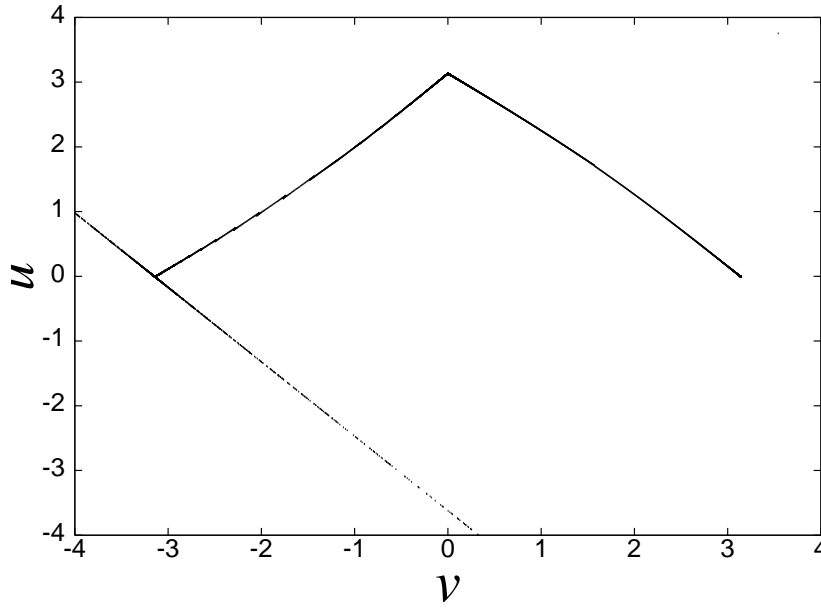


図 5.8: Borel 変換の方法によって構成された $(-\pi, 0)$ 近傍における不安定多様体 (実線)。
($\sigma = 0.3$, $k = 1.0 - 5.0 \times 10^{-11}$)

5.7.2 リコネクション転移

§ 5.1 で触れたように、 $\sigma \rightarrow 0$ の可積分極限では、不安定多様体は微分方程式のセパトリックスとなっており、そのトポロジーは、図 5.1 にあるように k に依存して変化する (リコネクション転移)。 $0 < k < 1$ で $(\pi, 0)$ と $(-\pi, 0)$ を接続するセパトリックスは、 $k \rightarrow 1-0$ の極限で軌道が u 軸に到着するまでの時間 t が発散し、 $k = 1$ の場合は、 $(\pi, 0)$ から出発するセパトリックスは、 $(0, \pi)$ に接続される。このときの homoclinic (heteroclinic) 構造の変化を調べてみよう。前節で示したように、安定・不安定多様体は簡単な対称性で結ばれているので、本節では不安定多様体のみを議論する。幾何学的に考えると、 $k \sim 1$, $\sigma \neq 0$ では、 $(\pi, 0)$ から出発する不安定多様体が本来の固定点 $(-\pi, 0)$ とは無関係な固定点 $(0, \pi)$ 近傍で振動することが期待される。実際、解析的な表式 (5.87) によれば、 k が 1 から離れている場合、不安定多様体は、特異点で急成長する付加項が大きくなる前に $(-\pi, 0)$ に到達するのに対し、 k が 1 に近い場合には、不安定多様体が u 軸 ($v = 0$ の軸) に到達するまでの時間 $t = T(k)$ が長くなるため ($\lim_{k \rightarrow 1-0} T(k) = \infty$)、付加項が u 軸付近で十分成長する。そ

して、 $t = T(k)$ で、 $\lim_{k \rightarrow 1-0} \begin{pmatrix} v_{00}(T) \\ u_{00}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$, $\lim_{k \rightarrow 1-0} \begin{pmatrix} x_2(T) \\ y_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \infty \\ -\infty \end{pmatrix}$ となるので、 $k \sim 1$ の時は、 $(0, \pi)$ 近傍において付与項は摂動項に比べてはるかに大きい。従って、不安定多様体は $(0, \pi)$ 近傍で振動している。ここで、 $(0, \pi)$ の振動が $t = t_1, t_1^*$ における摂動項

の特異性から誘導される単一の付与項により生じているのに対し、 $(-\pi, 0)$ 近傍の振動には、 $t = t_2, t_2^*$ で急成長する付与項も寄与していることに注意しておく ($\lim_{k \rightarrow 1-0} \operatorname{Re} t_2 = \infty$)。

図 5.9 に $k = 1.0 - 5.0 \times 10^{-11}$ 、 $k = 1.0 - 1.4 \times 10^{-12}$ の時の $(0, \pi)$ 近傍における不安定多様体の様子を示す。図からわかるように、 $(\pi, 0)$ の不安定多様体は $(0, \pi)$ 近傍で振動し、 k が 1 に近づくにつれ激しくなり、 $k = 1$ における振動の前駆現象を示している。但し、(5.87) は、 $k \sim 1$, $t > 2T$ では有効でないので、図 5.9 は $t < T$ のみを用いて描いた。 $k = 1.0 - 1.4 \times 10^{-12}$ の時、(5.87) は $t > 2T$ で自己交差を起こしてしまい、明らかに有効でないことを注意しておく。

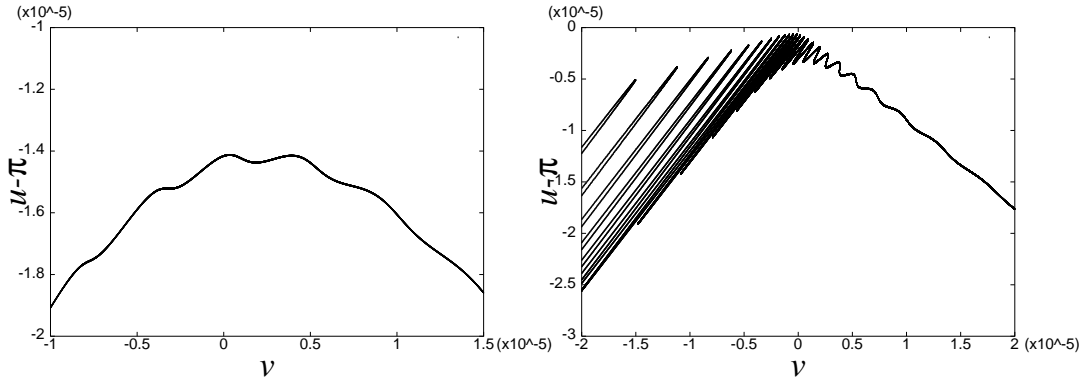


図 5.9: Borel 変換の方法によって構成された $(-\pi, 0)$ 近傍における不安定多様体 (実線)。左図は $\sigma = 0.3$, $k = 1.0 - 5.0 \times 10^{-11}$ の場合、右図は、 $\sigma = 0.3$, $k = 1.0 - 1.4 \times 10^{-12}$ の場合。

第6章 まとめと展望

第II部では、Borel変換の方法、ABAO (asymptotics beyond all orders) 法を用いて、近可積分 Harper 写像の安定・不安定多様体を解析的に構築した。 $(\pi, 0)$ の不安定多様体の異常振動は、摂動パラメータ σ に関して指数的に小さいが特定の時間領域を超えると急成長する項が (Stokes 現象) Stokes 線を越えた後に時間 t に関して指数成長し、摂動解より支配的になることにより説明される。従って、摂動パラメータに対して指数的に小さな項は、セパトリックス分裂の解析において本質的である。この指数的に小さな項を、摂動解 (漸近級数) の時間に関する2つの特異点近傍の解の振る舞いから Borel 変換の方法を用いて導出した。セパトリックスのトポロジカルな構造転移を支配するパラメータ k が転移の閾値 $k = 1$ から離れている場合、近似解が、固定点 $(-\pi, 0)$ の近傍で顕著な振動を表すことを見出した。この振動は数値計算と矛盾しない。 $k \sim 1$ の場合、近似解は、時間に関する2つ目の特異点近傍では有効ではないが、 $(-\pi, 0)$ 近傍を除くと不安定多様体の振る舞いを良く記述し、 $(0, \pi)$ 近傍で不安定多様体が顕著に振動することを表している。この $(0, \pi)$ 近くの振動は、 $k = 1$ におけるセパトリックス分裂の際に見られる振動の前駆現象であると考えられる。このように、不安定多様体は、 k が1に近づくにつれ、 $k = 1$ で見られる不安定多様体に連続的に移行していくことがわかる。このように、近似解は多様体の引き伸ばしを良く表すが、多様体の折り畳み構造までは再現できない。この場合、新しい方法が必要と考えられる。また、技術的な問題だが、不適当な初期時刻を選ぶと Stokes multiplier (SM) は、 $t = -\infty$ に最も近い特異点近傍において $k \rightarrow 1$ で発散しうることが判った。これは、初期条件をうまく選び、発散を $t = -\infty$ から2つ目に遠い SM に押し付けることで避けられることが判った。一般の場合の初期条件の選び方については将来の検討課題である。

本論文の方法が有用であるのは、摂動解 $y_0 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n y_{0n}$ が、次の条件を満たす時に限られる。

- y_{0n} が時間複素面で有限個の特異点列を持つ。
- $0 < \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ が存在し、特異点 $t = t_c$ において、 $y_{00}, y_{01} \cdots$ が、最初の有限項を除き、

$$y_{0n} = \frac{a_1^{(n)}}{(t - t_c)^{\alpha n + \beta}} + O\left(\frac{1}{(t - t_c)^{\alpha n + \beta - 1}}\right),$$

の形をもつ。

この条件を課すことで写像の形が制限される。このことを、 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 (又は、 \mathbb{C}^2 から \mathbb{C}^2) のシンプレクティック写像について、上記の仮定に加え、 $\alpha = 1, \beta \in \mathbb{Z}$ を課すと、シ

ンプレクティブ写像形が厳しく制限されることを示す [152]。整関数 $f(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} y(t+\sigma) - y(t) &= \sigma p(t) \\ p(t+\sigma) - p(t) &= \sigma f(y(t+\sigma)), \end{aligned} \quad (6.1)$$

と表される写像が、双曲型固定点を持つとする。そして、 t_c を摂動解の特異点とする。このとき、 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ が存在して、 $j \geq n$ の摂動解 y_{0j} が、 $t = t_c$ で $m+j-n$ 位の極を持つ条件を調べる。なお、 y_{0j} ($j < n$) は、対数型の特異点を持ちうることを注意しておく。特異点近傍では、 $\sigma^j y_{0j}(\sigma z + t_c) \propto \sigma^{n-m}/z^{m+j-n}$ となるから、 y_u を不安定多様体を表す関数とし、

$$\Phi_u(z, \sigma) \equiv \left(y_u(\sigma z + t_c) - \sum_{j=0}^{n-1} y_{0j}(\sigma z + t_c) \sigma^j \right) \sigma^{m-n},$$

を形式級数

$$\Phi_u(z, \sigma) \asymp \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{0j}(z) \sigma^j, \quad (6.2)$$

で展開することにより、 Φ_{0j} に関する方程式群が生成される。それらの関数空間 $\mathbb{C}[z][[z^{-1}]]$ における解は、通常の摂動解から誘導される漸近級数 $\left(y_0(\sigma z + t_c) - \sum_{j=0}^{n-1} y_{0j}(\sigma z + t_c) \sigma^j \right) \sigma^{m-n}$ と $z = -\infty$ で形式的に一致する。

すなわち、 $\left(y_0(\sigma z + t_c) - \sum_{j=0}^{n-1} y_{0j}(\sigma z + t_c) \sigma^j \right) \sigma^{m-n}$ を (6.1) に代入し σ のオーダー毎に比較するとことで方程式群が作られることが、特異点の形に対して行った仮定に相当する。

まずは、

$$\text{仮定 A: } \exists \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Phi_{00}(z) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Phi_u(z, \sigma),$$

が存在すると仮定する。従って、

$$\exists \Psi_{00} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\sigma^{r+1} p_u(\sigma z + t_c) - \sigma^r \Delta y_s() \right), \quad y_s(t) \equiv y_{0j}(t) \sigma^j,$$

が存在する。但し、 $r = m - n$ であり、 Δ は $\Delta g(z) \equiv g(z+1) - g(z)$ である。すなわち、(6.1) の第2式のポテンシャルに制限が加わり、

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \left\{ \sigma^{r+2} f \left(\frac{\Phi_0(z+1, \sigma)}{\sigma^r} + y_s(\sigma z + \sigma + t_c) \right) - \sigma^r \Delta^2 y_s(\sigma z + t_c) \right\}, \quad (6.3)$$

が存在すればよい。従って、

仮定 B $z = \pm\infty$ を含む領域 Ω が \mathbb{C} 上に存在して、 $\forall (z, a) \in \Omega \times \mathbb{C}$ に対して、

$$\exists_{eq} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left\{ \sigma^{r+2} f \left(\frac{a}{\sigma^r} + y_s(\sigma z + \sigma + t_c) \right) - \sigma^r \Delta^2 y_s(\sigma z + t_c) \right\}, \quad (6.4)$$

が存在し、 $\Omega \times \mathbb{C}$ 上で $f(x) \equiv 0$ でない連続関数に一様収束する。

この時、次の方程式が得られる。

$$\Delta \Phi_{00}(z) = \Psi_{00}(z) \quad (6.5)$$

$$\Delta \Psi_{00}(z) = S(\Phi_{00}(z+1), z) \quad (6.6)$$

仮定 A,B は、非常に強い制限であり、例えば、 $f(x)$ が N 次多項式であるとする、 $N = 2, 3$ のみが仮定 A,B を満たす。

証明：

$$\sigma^{r+2} f(\sigma^{-r} \Phi_0(z+1, \sigma) + y_s(z+1)) \quad (6.7)$$

$$= \sigma^{r+2-Nr} (\Phi_{00}(z+1)^N + \cdots + \hat{y}_s(z+1)^N) \times (1 + O(\sigma)) \quad (6.8)$$

これが、0 でない極限を持つため、

$$r + 2 - rN = 0$$

すなわち、 $(N, r) = (2, 2), (3, 1)$ である。

なお、Gelfreich [113] の解析により $N \geq 4$ では、ルート型のカットが現れることが知られている。

先行研究や本論文で示された様に、ABAO 法や Borel 変換の方法は、安定・不安定多様体の解析的な理解の上で非常に有用である。しかし、準周期軌道等のより一般の軌道の解析に有用かどうかはよく分かっていない。準周期軌道の崩壊に関しては、Birkhoff 鎖と呼ばれる安定・不安定多様体列が生み出され、そこからカオスが生じることが知られており、準周期軌道の崩壊に際して指数的に小さな項が重要な役割を演じると考えられる。

準周期軌道の特異点解析から意味のある漸近級数を導き得るかについては懐疑的であるが、摂動解がどのような意味で準周期軌道を近似するかを複素時間面で考えることができれば、ABAO 法を適用することができると期待される（但し、漸近級数を構成できていない分、optimal な評価とはならないだろう）。

また、研究背景でも触れたように、高次元系については既にいくつかの研究が行なわれているが、Arnold 拡散などの高次元系特有の現象を捉えるには至っていない。Arnold 拡散では、摂動に対して指数的に小さな項が重要な役割をすることが知られており、本論文の方法が有用であると考えられる。今後は、これらの場合について研究を進めていきたい。

第III部

結論

本研究では、メゾ系における輸送現象について量子系、古典系から一つずつ問題を選び議論した。前者については2つの自由電子浴には含まれた1次元・格子系(TLMモデル)の非平衡下における相転移について調べ、後者についてはパラメータに依存し相空間の軌道構造が大域的に変化するHarper写像のhomoclinic tangleのパラメータ変化に伴うリコネクションについて調べた。このような問題に対しては数値解析を用いたアプローチ研究が主流であるが、前者については C^* 代数を用いて、後者についてはBorel変換の方法を用いて、解析的に調べた点が特徴的である。

第I部では1次元系の相転移における電流、電圧の役割を調べるため、開放的TLMモデルを例にとり非平衡相転移について調べた。電子場のNESSは、 C^* 代数の結果である公式(1.4)を用いて構成し、秩序を特徴づける平均格子変位(秩序パラメータ)は、格子変位の運動方程式の固定点条件を自己無撞着に解くことで求めた。さらに、非平衡状態における相の安定性を断熱近似下における線形安定解析を用いて議論した。

電圧一定の条件下では、電圧、温度をパラメータとする相図は、単一の秩序相のみが安定である領域A、安定な無秩序相、安定な秩序相(エネルギーギャップが大きくギャップ上に少数の準粒子が存在する相)及び不安定な秩序相(エネルギーギャップが小さくギャップ上に多数の準粒子がある相)が存在する領域B、安定な無秩序相のみが存在する領域Cに分けられ、電流一定の条件下では、電流、温度をパラメータとする相図は無秩序相のみが安定な領域と単一の秩序相のみが安定な領域に分けられることがわかった。これは、電流がエネルギーギャップの上にある準粒子の数を決めることと関係しており、エネルギーギャップ内にフェルミエネルギーが存在するような系の相は、電流によって特徴付けられると考えられる。なお、電圧一定下で複数の相が可能であることを反映して負の微分伝導度が生じることも示した。

続いて、局所的な励起について考え閾値以上の電流をかけることにより、非平衡特有の局所的な励起が起こりうることを指摘した。これは、ミクロ系における散逸構造の例であると考えることができる。

従って、電流は「秩序を抑制する役割」、「秩序を誘起する役割」という古典系における散逸と同種の役割を担っており、さらに、上述したクラスの系においては、(電圧ではなく)電流が非平衡相転移を徴付けると言えた。今後の研究課題としては、実験による上述した振る舞いの観測可能性についての考察、XY鎖やextended Hubbard複数ある準安定相に対する安定性の考察、他のミクロ系における散逸構造の出現可能性についての考察、Lindblad法やKeldysh法と C^* 代数法の差異に関する考察などが挙げられる。

第II部では、パラメータに依存して相空間の軌道構造が大域的に変化する系の輸送を調べるために、Harper写像のhomoclinic tangle、安定多様体、不安定多様体について解析した。2次元写像系における相空間はトーラスによる準周期軌道とカオス軌道に分けられ、本研究の主題である輸送現象を議論する上では運動領域が非有界であるカオス領域の軌道が系の輸送を支配する。また、統計力学は相空間平均と長時間平均が一致するというエルゴード仮説に基づいており、エルゴード性が成立するカオス領域の振舞いのパラメータ依存性は非常に重要である。特に、系の大半がトーラスで埋められているパラメータ領域で生じているカオスは最もカオス性の強い領域であり、安定多様体、不安定多様体によって特徴付けられる。本研究では、Harper写像を例にとり、安定多様体、不安定多様体の幾何学的構造の大域的な変化であるリコネクションを調べた。安定多様体、不安定多様体は摂

動で調べることが原理的に不可能であり、この解析で現在までに最も成功している手法として Borel 変換の方法、ABAO (Asymptotics beyond all orders) の方法が挙げられる。

本論文では、多様体のトポロジカルな構造転移を支配するパラメータ k がリコネクションが起こる値 $k = 1$ に近い時、安定多様体、不安定多様体がそれに付随する固定点とは無関係な固定点付近で激しく振動することを示した。この振動により複数のカオス領域が統合され、カオス領域による輸送機構が大きく変化することを示唆している。

さらに、Borel 変換の方法に対する初期時刻の選び方について考察を行った。Harper 写像は自励系であり、不変多様体は初期時刻の取り方によらず表現される。ところが、Borel 変換の方法によって得られる不変多様体の漸近表式は有限時刻では初期時刻の取り方に依存する結果を与える。厳密には漸近表式は $|t| = \infty$ における挙動を再現し有限時刻の振舞いは近似的に表しているに過ぎず数学的には問題がない。一方、応用上は有限時刻の近似を与える表式としての意味も大きく、有限時刻では初期時刻の選び方の影響が極めて大きいことがわかったことは重要である。Harper 写像は二つの Stokes 線を持ち、この線を境に急成長する項の漸近表式が Borel 変換の方法によって与えられる。本研究では、リコネクションのパラメータ $k = 1$ 付近では、 k に関して発散を起こす可能性があることを示した。この問題に対して、初期時刻をうまく選ぶことで特異性を 2 つ目の Stokes 線で急成長する項にのみ現われるようにする方法を提案した。これにより、有限時間での漸近表式が有効であるような時間領域を増やしうることを指摘し、この方法に基づいてリコネクションを調べた。なお、この初期時刻の選び方は $k = 1$ における不安定多様体、安定多様体のうちの固定点に付随するものに漸近していくかを選んだことに対応する。今後の研究課題としては、初期条件の選び方と誤差の関係を厳密に評価すること、ABAO 法をトーラスの解析に利用すること、Arnold 拡散などの高次元系の振舞いを調べることなどが挙げられる。

総括すると、第 I 部では電流によってコントロールされる量子系の輸送を議論し、電流による輸送機構が劇的に変化することを指摘した。第 II 部では、パラメータ k によってコントロールされる古典系の相空間における輸送現象を議論し、パラメータの変化によって位相空間で大域的な輸送を担うカオス領域の構造が劇的に変化することを指摘した。どちらの部の結果もコントロールパラメータの変化による輸送機構の劇的な変化を示しており、量子系、古典系の両側に特徴的な振舞いが現われうると考えられているナノ系の輸送を理解する上で重要である。それと同時に、本研究の結果は、非平衡統計力学、力学系の基礎付けに繋がるものと期待されるものである。

付 録 A 連続モデルの導出

ここでは、開放的 TLM モデルを離散的な SSH モデルより導出する。まずは、SSH(H_S)、2つの熱浴 (H_B)、系と熱浴の相互作用 (V) からなる Hamiltonian から出発しよう。

$$\begin{aligned}
 H &= H_S + V + H_B \\
 H_S &= - \sum_{n=-1}^{N+1} \left(t_{n+1,n} C_{n+1}^\dagger C_n + (\text{h.c.}) \right) + \frac{K}{2} \sum_{n=-1}^L (y_{n+1} - y_n)^2 + \frac{M}{2} \sum_{n=0}^L \dot{y}_n^2 \\
 V &= \int d\mathbf{k} \left(\bar{v}_{\mathbf{k}} C_0^\dagger a_{\mathbf{k}L} + \bar{w}_{\mathbf{k}} C_L^\dagger a_{\mathbf{k}R} + (\text{h.c.}) \right), \\
 H_B &= \sum_{\nu} \int d\mathbf{k} \omega_{k\nu} a_{\mathbf{k}\nu}^\dagger a_{\mathbf{k}\nu} , \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

ここで、 C_n は n 番目のサイトの電子の消滅演算子 (cf. $C_{-1} \equiv 0$, $C_{L+1} \equiv 0$)、 $a_{\mathbf{k}\nu}$, ($\nu = L, R$) は左右熱浴の波数 \mathbf{k} の電子の消滅演算子、 y_n は n 番目のサイトの格子変位を表す。Su、Schrieffer、Heeger [49, 50] は、 $t_{n+1,n}$ が格子変位に対して線形であると仮定した：

$$t_{n+1,n} \equiv t_0 - \alpha(y_{n+1} - y_n) .$$

Takayama *et al.* [53] らは電子の分散関係を $-2t_0 \cos[(k \pm k_F)a] \approx \pm v_f k$ で近似し、right-moving と left-moving の電子場 $\psi_L(2na)$ 、 $\psi_R(2na)$ 及び連続的な格子変位 $y_n = (-1)^n 4\alpha \Delta(na)$ を導入し (a は格子定数) 連続モデルを導いた。ここで、 $L \equiv -1 \pmod{4}$ を仮定すると、 a が非常に小さい時には、離散 Hamiltonian (A.1) は、

$$\begin{aligned}
 H_S^{(e)} &\simeq \int_0^l dx \left(\psi_L^\dagger(x), \psi_R^\dagger(x) \right) \left[-2iat_0 \sigma_y \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_x \Delta(x) \right] \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \\
 H_S^{(\text{ph})} &\simeq \frac{K}{8\alpha^2 a} \int_0^l dx \Delta(x)^2 + \int_0^l dx \frac{M}{32\alpha^2 a} \dot{\Delta}(x)^2 \\
 V &\simeq \sqrt{a} \sum_{\sigma} \int d\mathbf{k} \left[\bar{v}_{\mathbf{k}} \left(-i\psi_L^\dagger(a) + \psi_R^\dagger(a) \right) a_{\mathbf{k}L} + \bar{w}_{\mathbf{k}} \left(\psi_L^\dagger(\ell) - i\psi_R^\dagger(\ell) \right) a_{\mathbf{k}R} \right] + (\text{h.c.}) \\
 H_B &= \sum_{\nu} \int d\mathbf{k} \omega_{k\nu} a_{\mathbf{k}\nu}^\dagger a_{\mathbf{k}\nu} . \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

と変形される。さらに、境界条件 $C_{-1} \equiv 0$ 、 $C_{L+1} \equiv 0$ は、

$$\psi_{L\sigma}(0) + i\psi_{R\sigma}(0) = 0, \quad i\psi_{L\sigma}(\ell) + \psi_{R\sigma}(\ell) = 0 , \tag{A.3}$$

となる。但し、 $\ell \equiv a + Na$ である。なお、 $N \equiv +1 \pmod{4}$ の場合にも本質的に同じ方程式が導かれることに注意しておく。境界条件を簡単にするために、本論文では次式で与え

られる電子場 $d(x)$ 、 $e(x)$ を用いる。

$$\begin{aligned} C_{2n-1} &= (-1)^n \sqrt{2a} d(2na) = (-1)^n \sqrt{a} [\psi_L(2na) + i\psi_R(2na)] \\ C_{2n} &= (-1)^n \sqrt{2a} e(2na) = (-1)^n \sqrt{a} [i\psi_L(2na) + \psi_R(2na)] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

この電子場および、Fermi 速度 $v \equiv 2at_0$ 、無次元結合定数 $\lambda \equiv 4\alpha^2 a / \pi v K$ 、フォノン振動数 $\omega_0 \equiv \sqrt{4K/M}$ 、トンネル結合の行列要素 $v_k \equiv \sqrt{2a}\bar{v}_k$ 、 $w_k \equiv \sqrt{2a}\bar{w}_k$ を用いると、(A.2)、(A.3) は本文の Hamiltonians (2.1)、(2.4)、(2.5)、及び境界条件 (2.2) に帰着する。

付 録 B Coulomb エネルギーと化学ポテンシャル

熱浴間の電圧を V とすると、化学ポテンシャルは $\mu_L - \mu_R = -eV$ を満たさなければならぬが、この条件のみでは μ_L 、 μ_R には不定性が残る。ここでは、 $\mu_L + \mu_R = 0$ の時に限り、一様解の各サイトの平均電子数が平衡状態と同一になり、系が全体として帯電しないことを示す。(2.31) に現れる \tilde{S} の導出と同様な計算により、熱浴から十分に離れたサイトにおける平均電子数は、

$$\langle \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \rangle_\infty = \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{2\pi v} \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} (f_L(\epsilon) + f_L(-\epsilon) + f_R(\epsilon) + f_R(-\epsilon)) , \quad (\text{B.1})$$

となる。平衡状態 ($\mu_L = \mu_R = 0$) では、上式の 4 つの Fermi 分布関数の和は 2 になるので、

$$\langle \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \rangle_{\text{eq}} = \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{\pi v} \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} , \quad (\text{B.2})$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} & \langle \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \rangle_\infty - \langle \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \rangle_{\text{eq}} \\ &= (1 - e^{-(\mu_L + \mu_R)/T}) \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{\pi v} \frac{\epsilon (f_L(\epsilon) f_R(-\epsilon) + f_L(-\epsilon) f_R(\epsilon))}{2\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} , \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

となる。これは $\mu_L = -\mu_R$ で零であり、それ以外では有限の値を持つ。

続いて、ハーフフィルドの SSH モデルと無矛盾になるようなカットオフ ω_c の選び方を吟味しておこう。SSH モデルにおける各サイトあたりの平均電子数は、

$$\langle d^+(x) d(x) \rangle = \langle e^+(x) e(x) \rangle = \frac{1}{2\pi v} \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} d\epsilon \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \approx \frac{\omega_c}{2\pi v} ,$$

(A.4) と前節で求めた $v = 2at_0$ を用いるとより、

$$\langle C_{2n}^+ C_{2n} \rangle = \langle C_{2n-1}^+ C_{2n-1} \rangle \approx \frac{\omega_c}{2\pi t_0} .$$

となる。従って、カットオフを $\omega_c = \pi t_0$ ととれば、各サイト当たりの電子数が $1/2$ になりハーフフィルドの SSH モデルと無矛盾になる。

付 録 C Green関数の導出

本文の §2.5 で議論したように、

$$\begin{aligned} \left(v \frac{\partial}{\partial x} + \Delta(x) \right) \phi_1(x) &= \omega \phi_2(x) \\ \left(-v \frac{\partial}{\partial x} + \Delta(x) \right) \phi_2(x) &= \omega \phi_1(x), \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

の境界条件 $x_1(0) = 0$, $y_2(\ell) = 0$ を満たす独立な 2 解 $(x_1(x), y_1(x))^T$, $(x_2(x), y_2(x))^T$ が見つければ、(2.19)–(2.22) にある様に Green 関数が構成され、incoming field を (2.23)、(2.24)、(2.25)、(2.26) から求めることが可能である。そこで、以下の 3 節では、一様解、ソリトン解、ポーラロン解のそれぞれの場合について $(x_1(x), y_1(x))^T$, $(x_2(x), y_2(x))^T$ を与える。なお、以下では、本文同様に $\tilde{x} \equiv x - \ell$ とおく。

C.1 一様解

$\Delta(x) = \Delta_0$ の時は、微分方程式は簡単に解けて、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega \sin \kappa x \\ v \kappa \cos \kappa x + \Delta_0 \sin \kappa x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -v \kappa \cos \kappa \tilde{x} + \Delta_0 \sin \kappa \tilde{x} \\ \omega \sin \kappa \tilde{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であたえられる。

C.2 ソリトン解

$D_{\pm} \equiv \pm v \frac{\partial}{\partial x} + \Delta(x)$ とおき、 $\Delta(x) = \Delta_0 \tanh \kappa_s(x - a)$ とする。すると、

$$\begin{aligned} D_+ D_- &= -v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v \Delta_0 \kappa_s \operatorname{sech}^2 \kappa_s(x - a) + \Delta_0^2 \tanh \kappa_s(x - a) \\ D_- D_+ &= -v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - v \Delta_0 \kappa_s \operatorname{sech}^2 \kappa_s(x - a) + \Delta_0^2 \tanh \kappa_s(x - a) \end{aligned}$$

上式は、 $\Delta_0 = v \kappa_s$ の時、

$$D_+ D_- = -v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_0^2$$

$\Delta_0 = -v\kappa_s$ の時、

$$D_- D_+ = -v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_0^2$$

となる。以下、 $\Delta_0 = v\kappa_s$ の場合のみを考える。この時、

$$\begin{aligned} D_+ D_- \phi_2(x) &= \left(-v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_0^2 \right) \phi_2(x) = \omega^2 \phi_2(x) \\ D_- \phi_2(x) &= \left(-v \frac{\partial}{\partial x} + \Delta(x) \right) \phi_2(x) = \omega \phi_1(x) \end{aligned}$$

但し、 $v\kappa \equiv \sqrt{\omega^2 - \Delta_0^2}$ である。従って、境界条件を満たす解は、

$$\begin{aligned} x_1(x) &= \frac{1}{\omega} \left[\left\{ \frac{(v\kappa)^2}{\Delta(0)} + \Delta(x) \right\} \sin \kappa x + (v\kappa) \left\{ \frac{\Delta(x)}{\Delta(0)} - 1 \right\} \cos \kappa x \right] \\ y_1(x) &= \sin \kappa x + \frac{v\kappa}{\Delta(0)} \cos \kappa x \\ x_2(x) &= \frac{1}{\omega} [\Delta(x) \sin \kappa(x-l) - v\kappa \cos \kappa(x-l)] \\ y_2(x) &= \sin \kappa(x-l), \end{aligned}$$

となる。 κ が純虚数となる時も上の表式は有効だが、以下、 $\kappa = i\tilde{\kappa}$ として、 $\tilde{\kappa}$ を用いて書き直そう。この時、上式を i で割れば、

$$\begin{aligned} x_1(x) &= \frac{1}{\omega} \left[\left\{ \frac{-(v\tilde{\kappa})^2}{\Delta(0)} + \Delta(x) \right\} \sinh \tilde{\kappa} x + (v\tilde{\kappa}) \left\{ \frac{\Delta(x)}{\Delta(0)} - 1 \right\} \cosh \tilde{\kappa} x \right] \\ y_1(x) &= \sinh \tilde{\kappa} x + \frac{v\tilde{\kappa}}{\Delta(0)} \cosh \tilde{\kappa} x \\ x_2(x) &= \frac{1}{\omega} [\Delta(x) \sinh \tilde{\kappa}(x-l) - v\tilde{\kappa} \cosh \tilde{\kappa}(x-l)] \\ y_2(x) &= \sinh \tilde{\kappa}(x-l), \end{aligned}$$

が得られる。

C.3 ポーラロン解

$D_{\pm} \equiv \pm v \frac{\partial}{\partial x} + \Delta(x)$ かつ

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \Delta_0 - \kappa_0 v \{ \tanh \kappa_0(x-a+x_0) - \tanh \kappa_0(x-a-x_0) \} \\ &\equiv \Delta_0 - \kappa_0 v(t_+ - t_-) \end{aligned}$$

とおく。 $\tanh \kappa_0 x_0 = \frac{v\kappa_0}{\Delta_0 + \omega_B}$ によって ω_B を定義すれば、

$$\begin{aligned} \tanh 2\kappa_0 x_0 &= \frac{v\kappa_0}{\Delta_0}, \quad \cosh 2\kappa_0 x_0 = \frac{\Delta_0}{\omega_B}, \quad \sinh 2\kappa_0 x_0 = \frac{v\kappa_0}{\omega_B} \\ (t_+ - t_-) &= \frac{v\kappa_0}{\omega_B} \frac{1}{c_+ c_-}, \quad \frac{1}{c_+ c_-} \frac{\Delta_0}{\omega_B} = 1 - t_+ t_- \end{aligned}$$

などが成立する。従って、

$$D_+ D_- \Delta(x) = -v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v \frac{d\Delta(x)}{dx} + \Delta(x)^2$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} v \frac{d\Delta(x)}{dx} &= -(v\kappa_0)^2 \left(\frac{1}{c_+^2} - \frac{1}{c_-^2} \right) \\ \Delta(x)^2 &= (v\kappa_0)^2 (t_+ - t_-)^2 - 2(v\kappa_0)\Delta_0(t_+ - t_-) + \Delta_0^2 \end{aligned}$$

を用いれば、 $D_+ D_-$ の後半 2 項は、

$$\begin{aligned} v \frac{d\Delta(x)}{dx} + \Delta(x)^2 &= 2(v\kappa_0)^2 (t_+^2 - t_+ t_-) - 2(v\kappa_0)\Delta_0(t_+ - t_-) + \Delta_0^2 \\ &= 2(v\kappa_0)^2 \left(t_+^2 - t_+ t_- - \frac{\Delta_0}{\omega_B} \frac{1}{c_+ c_-} \right) + \Delta_0^2 \\ &= 2(v\kappa_0)^2 \left(t_+^2 - t_+ t_- - \frac{c_+ c_- - s_+ s_-}{c_+ c_-} \right) + \Delta_0^2 \\ &= -2 \frac{(v\kappa_0)^2}{c_+^2} + \Delta_0^2 \end{aligned}$$

となるので、元の微分方程式は簡単に解くことができる。

$(v\kappa)^2 \equiv \omega^2 - \Delta_0^2 > 0$ の時
 $\phi_2(x)$ は次式に従う。

$$\left(D^2 + \kappa^2 + \frac{2\kappa_0^2}{c_+^2} \right) \phi_2(x) = 0$$

ここで、 $\phi_2(x) = e^{\pm i\kappa x} G_{\pm}$ とおけば、 G_{\pm} は、

$$\left(D^2 \pm 2i\kappa D + \frac{2\kappa_0^2}{c_+^2} \right) G_{\pm} = 0 ,$$

を満たす。ここで、

$$\begin{aligned} \left(D^2 \pm 2i\kappa D + \frac{2\kappa_0^2}{c_+^2} \right) (t_+) &= \pm 2i\kappa\kappa_0 \frac{1}{c_+^2} \\ \left(D^2 \pm 2i\kappa D + \frac{2\kappa_0^2}{c_+^2} \right) (1) &= 2\kappa_0^2 \frac{1}{c_+^2} \end{aligned}$$

を用いれば、 $\phi_2(x)$ は、

$$e^{\pm i\kappa x} \left(t_+ \mp i \frac{\kappa}{\kappa_0} \right)$$

の線形結合で表されることがわかる。この時、 $\phi_1(x)$ は、

$$e^{\pm i\kappa x} \frac{\Delta_0 \mp i v \kappa}{\omega} \left(t_- \mp i \frac{\kappa}{\kappa_0} \right) ,$$

の線形結合で表される。従って、境界条件を満たす解は、

$$\begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\kappa x} f_-(0)^* f_-(x) - e^{-i\kappa x} f_-(0) f_-(x)^* \\ \gamma^* e^{i\kappa x} f_-(0)^* f_+(x) - \gamma e^{-i\kappa x} f_-(0) f_+(x)^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma e^{i\kappa \tilde{x}} f_+(\ell)^* f_-(x) - \gamma^* e^{-i\kappa \tilde{x}} f_+(\ell) f_-(x)^* \\ e^{i\kappa \tilde{x}} f_+(\ell)^* f_+(x) - e^{-i\kappa \tilde{x}} f_+(\ell) f_+(x)^* \end{pmatrix}$$

となる。ただし、 $\gamma \equiv \frac{\Delta_0 - i v \kappa}{\omega}$, $f_{\pm}(x) \equiv t_{\pm} - i \frac{\kappa}{\kappa_0}$ とおいた。上の表式は、 κ が純虚数となる時も有効であるが、 $\kappa = i\tilde{\kappa}$ として、 $\tilde{\kappa}$ を用いて書き直しておくとも便利である：

$$\begin{pmatrix} x_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{\kappa} x} f_{-+}(0) f_{--}(x) - e^{-\tilde{\kappa} x} f_{--}(0) f_{-+}(x) \\ \gamma_+ e^{\tilde{\kappa} x} f_{-+}(0) f_{+-}(x) - \gamma_- e^{-\tilde{\kappa} x} f_{--}(0) f_{++}(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_- e^{\tilde{\kappa} \tilde{x}} f_{++}(\ell) f_{--}(x) - \gamma_+ e^{-\tilde{\kappa} \tilde{x}} f_{+-}(\ell) f_{-+}(x) \\ e^{\tilde{\kappa} \tilde{x}} f_{++}(\ell) f_{+-}(x) - e^{-\tilde{\kappa} \tilde{x}} f_{+-}(\ell) f_{++}(x) \end{pmatrix}$$

なお、 $f_{\sigma\pm}$ 、 γ_{\pm} は、 $f_{\sigma\pm} = t_{\sigma} \pm \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\kappa}_0}$, $\gamma_{\pm} = \frac{\Delta_0 \pm v \tilde{\kappa}}{\omega}$ である。

付 録 D 固定点の安定性

ここでは、(2.42) の非自明解のうち定電圧で安定なものは、定電流でも安定となることを示す。さらに、(2.46) で与えられる絶対零度、定電圧時に不安定な秩序相が絶対零度、定電流時に安定であることを示す（定電圧の場合に不安定になることは、§ 2.9.2 で示した通りである）。まず、定電圧時の安定指数 χ_V と定電流時の安定指数 χ_I の差は、

$$\chi_I(\Delta_0) - \chi_V(\Delta_0) = -\lambda\Delta_0 \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{\Delta_0} \left(\frac{\partial J}{\partial \Delta_0} \right)_V / \left(\frac{\partial J}{\partial V} \right)_{\Delta_0}, \quad (\text{D.1})$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{eT}{\sinh\left(\frac{eV}{2T}\right)} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{\Delta_0} &= \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \frac{e^2 \sinh\left(\frac{\epsilon}{T}\right)}{\left\{ \cosh\left(\frac{eV}{2T}\right) + \cosh\left(\frac{\epsilon}{T}\right) \right\}^2} > 0 \\ \left(\frac{\partial J}{\partial V} \right)_{\Delta_0} &= \frac{G_0}{T} \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}}{\epsilon} \frac{1 + \cosh\left(\frac{eV}{2T}\right) \cosh\left(\frac{\epsilon}{T}\right)}{\left\{ \cosh\left(\frac{eV}{2T}\right) + \cosh\left(\frac{\epsilon}{T}\right) \right\}^2} > 0 \\ \frac{e\Delta_0}{\sinh\left(\frac{eV}{2T}\right)} \left(\frac{\partial J}{\partial \Delta_0} \right)_V &= - \int_{|\Delta_0|}^{\omega_c} d\epsilon \frac{2G_0\Delta_0^2}{\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2} \left\{ \cosh\left(\frac{eV}{2T}\right) + \cosh\left(\frac{\epsilon}{T}\right) \right\}} < 0, \end{aligned}$$

であるので、 $\chi_I(\Delta_0) > \chi_V(\Delta_0)$ がいえる。すなわち、秩序相は定電圧の場合より定電流の場合の方がより安定である。

次に、(2.46) で与えられる相の定電流時の安定性について調べる。これについては、

$$\Delta_0 \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{\Delta_0} \left(\frac{\partial J}{\partial \Delta_0} \right)_V / \left(\frac{\partial J}{\partial V} \right)_{\Delta_0} = \frac{2r}{r^2 - 1} \left(\int_1^r dx \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} - \sqrt{r^2 - 1} \right), \quad (\text{D.2})$$

が成立するので ($r \equiv |eV/2\Delta_0| > 1$)、

$$\begin{aligned} \chi_I(\Delta_0) &= 2\lambda \left(\frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 - \Delta_0^2}} - 1 \right) + \frac{2\lambda r}{r^2 - 1} \left\{ r - \frac{1}{r} - \int_1^r dx \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right\} \\ &= 2\lambda \left(\frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 - \Delta_0^2}} - 1 \right) + \frac{2\lambda r}{r^2 - 1} \int_1^r dx \left\{ 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right\} \\ &= 2\lambda \left(\frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 - \Delta_0^2}} - 1 \right) + \frac{2\lambda r}{r^2 - 1} \int_1^r dx \frac{1 + 3x^2}{x^2(x^2 + 1 + x\sqrt{x^2 - 1})} > 0. \end{aligned}$$

が言える。すなわち、この秩序相は定電流時に安定である。

付 録 E Sommerfeld 展開の漸近評価

§ 2.9.3 で議論した第 1 閾電圧を決定する方程式 (2.47):

$$0 = \frac{\chi_N}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2}S(0, V, T) = \frac{1}{2\lambda} - \int_0^{\omega_c/T} \frac{d\epsilon}{\epsilon} \frac{\sinh \epsilon}{\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh \epsilon}$$

を低温で厳密に評価するのが、この Appendix の目標である。上式は、

$$\frac{1}{2\lambda} = \int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{\sinh \frac{\omega_c x}{T}}{\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh \frac{\omega_c x}{T}}$$

と変形されるので、 $\beta = \omega_c/T$, $\bar{V} = eV/(2\omega_c)$ とおけば、以下のようになる。

$$\frac{1}{2\lambda} = \int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{\sinh \beta x}{\cosh(\beta \bar{V}) + \cosh \beta x} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\tanh \frac{\beta(x - \bar{V})}{2} + \tanh \frac{\beta(x + \bar{V})}{2} \right)$$

続く 3 節では、これについて詳細に検討しよう。

E.1 Sommerfeld 展開

本節では、一般の場合の Sommerfeld 展開のテクニックを使うことにより (2.47) が収束半径 0 の漸近級数となることを示す。漸近級数の厳密な評価は E.2 で与える。

$$Z(\beta, \bar{V}) \equiv \int_0^\beta dx f(x) \frac{\sinh x}{\cosh(\beta \bar{V}) + \cosh x}$$

から出発しよう。ここで、 $f(x)$ は

$$\exists \delta > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1+\delta} f(x) \frac{\sinh x}{\cosh(\beta \bar{V}) + \cosh x} = 0$$

を満たし $0 < \epsilon < \beta$ で無限回微分可能な関数である。 $\epsilon \equiv 1/(\beta V)$ とし、 ϵ が小さい (低温) 場合の評価をするのが、Sommerfeld 展開である。以下、 \approx を ϵ に関して指数的に小さい項を無視した等号とする。すると、 $Z(\beta, \bar{V})$ は、次の様に評価される。

$$\begin{aligned} Z(\beta, \bar{V}) &= \int_0^1 dx \beta f(\beta x) \frac{\sinh \beta x}{\cosh(\beta \bar{V}) + \cosh \beta x} \\ &= \left[F(\beta x) \frac{\sinh \beta x}{\cosh(\beta \bar{V}) + \cosh \beta x} \right]_0^1 - \int_0^1 dx \frac{\beta}{4} F(\beta x) \left(\operatorname{sech}^2 \frac{\beta(x - \bar{V})}{2} + \operatorname{sech}^2 \frac{\beta(x + \bar{V})}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx F(\beta) \frac{\sinh \beta}{\cosh(\beta\bar{V}) + \cosh \beta} - \int_0^1 dx \frac{\beta}{4} F(\beta x) \operatorname{sech}^2 \frac{\beta(x - \bar{V})}{2} + O(e^{-\beta\bar{V}}) \\
&= F(\beta) - \int_{-\bar{V}}^{1-\bar{V}} dx \frac{\beta}{4} F(\beta\bar{V} + \beta x) \operatorname{sech}^2 \frac{\beta x}{2} \\
&\approx F(\beta) - \int_{-\bar{V}}^{\bar{V}} dx \frac{\beta}{4} F(\beta\bar{V} + \beta x) \operatorname{sech}^2 \frac{\beta x}{2} + O(e^{-\beta K}), \quad (K \equiv \min(\bar{V}, 1 - \bar{V})) \\
&\approx F(\beta) - \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\beta\bar{V}) \frac{\beta}{4 n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\beta x)^n \operatorname{sech}^2 \frac{\beta x}{2} + O(e^{-\beta\bar{V}}) \\
&= F(\beta) - \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\beta\bar{V}) \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} dx (2x)^n \operatorname{sech}^2 x \\
&= F(\beta) - F(\beta\bar{V}) - \sum_{n:\text{even}} \frac{2^n}{n!} F^{(n)}(\beta\bar{V}) 2^{1-n} (1 - 2^{1-n}) \Gamma(1+n) \zeta(n) \\
&= F(\beta) - F(\beta\bar{V}) - \sum_{n=1}^{\infty} 2F^{(2n)}(\beta\bar{V}) (1 - 2^{1-2n}) \zeta(2n)
\end{aligned}$$

但し、 $F(x) \equiv \int_0^x f(y)dy$, $F^{(n)} \equiv \frac{d^n F}{dx^n}$ である。

注1) $F(\beta x + \beta\bar{V})$ の収束半径が積分領域より小さい ($x < \bar{V}$) ことを仮定して展開しているが、そうでない場合は、積分領域をせまくし、 K の値をそれに応じて変えればよい。

注2) § 2.9.3 では、 $e^{-\beta}$, $e^{-\beta(1-\bar{V})}$, $(\beta = \omega_c/T)$ に比例する項を無視すると、 $Z(\beta, \bar{V}) - F(\beta)$ が $\beta\bar{V}$ にしか依存しないことを利用して $\phi(\beta\bar{V})$ を定義した。

本論文で扱ったのは $F(x) = \log x$ であり、 $F(\beta x + \beta\bar{V})$ は収束半径が \bar{V} であるので、上の式がそのまま適用可能である。 $F^{(n)}(\beta\bar{V}) = -(n-1)!\epsilon^n$ を用いれば、

$$Z(\beta, \bar{V}) \approx -\log \bar{V} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n} (1 - 2^{1-2n}) \zeta(2n) \epsilon^{2n},$$

と評価できる。さらに、

$$a_n \equiv \frac{1 - 2^{1-2n}}{n} (2n)! \zeta(2n),$$

の n が大きい時の漸近形は、

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\pi^{2n} (2^{2n-1} - 1) B_n}{n} \\
&\sim 4\sqrt{\pi n} (2n)^{2n-1}
\end{aligned}$$

であるから、 $Z(\beta, \bar{V})$ の級数展開は収束半径が 0 である。従って、有限項で漸近級数の評価をするのが望ましい。

E.2 漸近展開の評価

前節で示したように、

$$\begin{aligned} S(\beta) &\equiv \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\tanh \frac{\beta(x - \bar{V})}{2} + \tanh \frac{\beta(x + \bar{V})}{2} \right) \\ &= -\frac{\beta}{4} \int_0^1 \log x \left(\operatorname{sech}^2 \frac{\beta(x - \bar{V})}{2} + \operatorname{sech}^2 \frac{\beta(x + \bar{V})}{2} \right) \end{aligned}$$

の $\epsilon = 1/(\beta\bar{V})$ に関する冪級数展開は漸近級数としてか意味がない級数である。本節では、 $S(\beta)$ の低温での振る舞いを誤差も含め評価する。2 項目は、

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{4} \int_0^1 \log x \operatorname{sech}^2 \frac{\beta(x + \bar{V})}{2} dx &\leq -\frac{\beta}{4} \int_0^1 \log x dx \int_{\bar{V}}^{1+\bar{V}} \operatorname{sech}^2 \frac{\beta x}{2} dx \\ &\leq \beta \int_{\bar{V}}^{\infty} e^{-\beta x} dx \\ &= e^{-1/\epsilon} \end{aligned}$$

であり、 ϵ に対して指数的に小さい。他方、1 項目は、

$$\begin{aligned} I &\equiv -\frac{\beta}{4} \int_0^1 \log x \operatorname{sech}^2 \frac{\beta(x - \bar{V})}{2} dx \\ &= -\frac{\beta}{4} \int_{-\bar{V}}^{\bar{V}} \log(x + \bar{V}) \operatorname{sech}^2 \frac{\beta x}{2} dx - \frac{\beta}{4} \int_{\bar{V}}^{1+\bar{V}} \log(x + \bar{V}) \operatorname{sech}^2 \frac{\beta x}{2} dx \quad (\text{E.1}) \end{aligned}$$

となる。ここで、(E.1) の 1 項目は、

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{4} \int_{-\bar{V}}^{\bar{V}} \log(x + \bar{V}) \operatorname{sech}^2 \frac{\beta x}{2} dx &= -\frac{1}{4\epsilon} \int_{-1}^1 \left(\log \bar{V} - \frac{x^2}{2} + \log(1+x) + \frac{x^2}{2} \right) \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2\epsilon} dx \\ &= -\frac{1}{4\epsilon} \int_{-1}^1 \left(\log \bar{V} - \frac{x^2}{2} \right) \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2\epsilon} dx + E_1 \\ &= -\log \bar{V} + \frac{\pi^2}{6} \epsilon^2 + E_1 + \frac{1}{2\epsilon} \int_1^{\infty} \left(\log \bar{V} - \frac{x^2}{2} \right) \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2\epsilon} dx \\ &= -\log \bar{V} + \frac{\pi^2}{6} \epsilon^2 + E_1 - (-2 \log \bar{V} + 1 + 2\epsilon + 2\epsilon^2) e^{-1/\epsilon} \end{aligned}$$

と計算できる。但し、 $E_1 \equiv -\frac{1}{4\epsilon} \int_{-1}^1 \left(\log(1+x) + \frac{x^2}{2} \right) \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2\epsilon} dx$ である。いまから E_1 を評価しよう。次節で示すように、 $A^2 \geq 1/3$ に対して、

$$A \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}} \geq -\log(1+y) - \log(1-y) - y^2 \geq 0, \quad (0 \leq y \leq 1)$$

が成立するので、

$$E_1 = -\frac{1}{4\epsilon} \int_{-1}^1 \left(\log(1+x) + \frac{x^2}{2} \right) \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2\epsilon} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\epsilon} \int_0^1 [\log(1+y) + \log(1-y) + y^2] \operatorname{sech}^2 \frac{y}{2\epsilon} dy \\
&< \frac{1}{4\epsilon} \int_0^1 \frac{Ay^4}{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{sech}^2 \frac{y}{2\epsilon} dy \\
&< \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 \frac{Ay^4}{\sqrt{1-y}} e^{-\frac{y}{\epsilon}} dy \\
&= \frac{2}{\epsilon} \int_0^1 A(4y^3 - y^4/\epsilon) \sqrt{1-y} e^{-\frac{y}{\epsilon}} dy \\
&< 2\epsilon^3 \int_0^{1/\epsilon} A(4z^3 - z^4) e^{-y} dy \\
&= \frac{2A}{e} \epsilon^3
\end{aligned}$$

と評価できる。ここで、 $A = 1/\sqrt{3}$ ととれば、

$$E_1 < \frac{2}{e\sqrt{3}} \epsilon^3 < \frac{\epsilon^3}{2}$$

である。さらに、(E.1) の 2 項目は、

$$\begin{aligned}
\left| -\frac{\beta}{4} \int_{\bar{V}}^{1-\bar{V}} \log(x + \bar{V}) \operatorname{sech}^2 \frac{\beta x}{2} dx \right| &< \beta \left| \int_{\bar{V}}^{1-\bar{V}} |\log(x + \bar{V})| dx \right| \int_K^\infty e^{-\beta x} dx \\
&= e^{-\beta K} |2\bar{V} - 1 - 2\bar{V} \log 2\bar{V}| < e^{-\beta K}
\end{aligned}$$

と評価できる。但し、 $K \equiv \min(\bar{V}, 1 - \bar{V})$ である。以上まとめれば、

$$\begin{aligned}
\left| I - \left(-\log \bar{V} + \frac{\pi^2}{6} \epsilon^2 \right) \right| &< \left| \frac{\epsilon^3}{2} - (-2 \log \bar{V} + 1 + 2\epsilon + 2\epsilon^2) e^{-1/\epsilon} \right| + e^{-\beta K} \\
|S(\beta) - I| &< e^{-1/\epsilon}
\end{aligned} \tag{E.2}$$

特に、 $\bar{V} < 1/2$ 場合は、 $\beta K = 1/\epsilon$ であり、漸近展開の有効範囲をみるために、2 次の項が誤差項の 10 倍より大きいとすると、

$$\frac{\pi^2}{6} \epsilon^2 > 5\epsilon^3 \Leftrightarrow \epsilon < \frac{\pi^2}{30} < 0.35$$

となる。なお、この時、 $\frac{e^{-1/\epsilon}}{8\pi\epsilon^4} \sim 0.009$ である。最後に、(E.2) を元の変数に直すと ($\beta = \omega_c/T$, $\bar{V} = eV/(2\omega_c)$)、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^{\omega_c/T} \frac{d\epsilon}{\epsilon} \frac{\sinh \epsilon}{\cosh(\frac{eV}{2T}) + \cosh \epsilon} - \left(-\log \frac{eV}{2\omega_c} + \frac{\pi^2}{6} \epsilon^2 \right) \right| \\
&< \left| \epsilon^3/2 - (-2 \log V + 1 + 2\epsilon + 2\epsilon^2) e^{-1/\epsilon} \right| + e^{-\beta K} + e^{1/\epsilon}
\end{aligned}$$

但し、 $\epsilon = \frac{2T}{eV}$, $K \equiv (\frac{eV}{2\omega_c}, \frac{2\omega_c - eV}{2\omega_c})$ (本文では、 $K = \frac{eV}{2\omega_c}$) である。

E.3 漸近展開の評価で用いる不等式

本節では、 $A^2 \geq 1/3$, $0 < y < 1$ に対して

$$0 < g(y) \equiv -[\log(1+y) + \log(1-y) + y^2] < \frac{Ay^4}{\sqrt{1-y^2}} \quad (\text{E.3})$$

が成立することを示す。 $g(0) = 0$, $g'(y) = \frac{2y^3}{1-y^2}$ であるから、最初の不等式の成立は明らかである。ここで、

$$h(y) \equiv \frac{Ay^4}{\sqrt{1-y^2}} - g(y)$$

とおくと、 $h(0) = 0$ より、 $h'(y) > 0$, ($0 < y < 1$) を示せば良い。 $h'(x)$ は、

$$\begin{aligned} h'(y) &= \frac{Ay^3(4-3y^2)}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}} - \frac{2y^3}{1-y^2} \\ &= \frac{y^3}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}} \left(A(4-3y^2) - 2\sqrt{1-y^2} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $0 < Y = y^2 < 1$ で

$$\begin{aligned} A(4-3Y) - 2\sqrt{1-Y} > 0 &\Leftrightarrow A^2(4-3Y)^2 - 4(1-Y) > 0 \\ &\Leftrightarrow A^2(9Y^2 - 24Y + 4BY + 16 - 4B) > 0, \quad (B \equiv A^{-2}) \end{aligned}$$

となるように A を選んだ時に、最初の不等式 (E.3) が成立する。

このための必要条件は右辺の Y に関する 2 次式が $Y = 0, 1$ で正となることであるから、

$$16 - 4B > 0, \text{ i.e., } B < 4$$

である。 Y の 2 次関数の軸の位置は $(12-2B)/9 > 0$ なので、 $(12-2B)/9 > 1$ 、もしくは、判別式が負 $B \leq 3$ となることのが十分条件である。すなわち、 $1/3 \leq A^2$ であれば

$$A \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}} \geq -\log(1-y) - \log(1+y) - y^2, \quad (0 \leq y < 1)$$

が成立する。

付 録 F $k > 1$ の場合の解の構成

ここでは、Harper 写像の対称性を用いることにより、簡単な変数変換で $k < 1$ の場合が、 $k > 1$ の場合に帰着されることを示す。実際、

$$\begin{aligned}\tau &\equiv kt, \quad \tilde{\sigma} \equiv k\sigma \\ \tilde{v}(\tau) &\equiv v\left(\frac{\tau}{k}\right), \quad \tilde{u}(\tau) \equiv u\left(\frac{\tau}{k}\right)\end{aligned}\tag{F.1}$$

を (4.5) に代入することにより、次式を得る。

$$\begin{aligned}\tilde{v}(\tau + \tilde{\sigma}) - \tilde{v}(\tau) &= -\frac{1}{k}\tilde{\sigma} \sin \tilde{u}(\tau) \\ \tilde{u}(\tau + \tilde{\sigma}) - \tilde{u}(\tau) &= \tilde{\sigma} \sin \tilde{v}(\tau + \tilde{\sigma})\end{aligned}\tag{F.2}$$

次に、 $\bar{v}(\tau) = \tilde{v}(-\tau)$, $\bar{u}(\tau) = \tilde{u}(-\tau)$ とおけば、

$$\begin{aligned}\bar{v}(\tau + \tilde{\sigma}) - \bar{v}(\tau) &= \frac{1}{k}\tilde{\sigma} \sin \bar{u}(\tau + \tilde{\sigma}) \\ \bar{u}(\tau + \tilde{\sigma}) - \bar{u}(\tau) &= -\tilde{\sigma} \sin \bar{v}(\tau)\end{aligned}\tag{F.3}$$

と書き直される。これは v, u が入れ代わった $k > 1$ の場合の Harper 写像と等価である。従って、元の $k < 1$ の結果に対し以上の置き換えを行うことにより、 $k > 1$ の場合の結果を得ることができる。

付 録 G 線形化方程式の Borel 変換の解析

本論、及び、Appendix H でも議論されるように、 V_{01}, U_{01} は、 $V_{10}^\alpha, U_{10}^\alpha$ ($\alpha = A, B$) で表すことができるため、解析接続を行うためには、線形化方程式の $C[z][[z^{-1}]]$ における解 $(V_{10}^A(z), U_{10}^A(z))$ 、 $(V_{10}^B(z), U_{10}^B(z))$ の漸近形を調べる必要がある。

$(\tilde{V}^A(p), \tilde{U}^A(p))$ 、 $(\tilde{V}_B(p), \tilde{U}_B(p))$ を、各々、 $(V_{10}^A(z), U_{10}^A(z))$ 、 $(V_{10}^B(z) - z, U_{10}^B(z) - (z + \frac{1}{2}))$ の Borel 変換であるとする、これらは、次式を満たす。

$$\begin{aligned} (e^{-p} - 1)\tilde{V}_A(p) &= \tilde{U}_A(p) * g(p) , \\ (1 - e^p)\tilde{U}_A(p) &= \tilde{V}_A(p) * f(p) , \\ (e^{-p} - 1)\tilde{V}_B(p) &= \tilde{U}_B(p) * g(p) + \frac{1}{2}g(p) + g'(p) , \\ (1 - e^p)\tilde{U}_B(p) &= \tilde{V}_B(p) * f(p) + f'(p) , \end{aligned} \quad (G.1)$$

ここで、 $f(p)$ 、 $g(p)$ は、

$$B \left[\frac{e^{iV_{00}(z)}}{z} \right] = f(p), \quad B \left[\frac{e^{-iU_{00}(z)}}{z} \right] = g(p) .$$

で定義される。ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{V}_A(p) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n^V p^n, \quad \tilde{U}_A(p) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n^U p^n; \quad A_0^V = -1, \quad A_0^U = 1 , \\ \tilde{V}_B(p) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n^U p^n, \quad \tilde{U}_B(p) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n^U p^n; \quad B_0^V = 0, \quad B_0^U = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

を (G.1) に代入して各項の係数を比較すれば、 a_n 、 b_n は帰納的に決定される。数値計算の結果、

$$\begin{aligned} A_{2n-1}^V &= 0, \quad (\forall n) \\ A_{2n}^V (-1)^n (2\pi)^{2n} &\rightarrow -B_4 n, \quad (n \rightarrow \infty) \\ A_{2n-1}^U (-1)^{n+1} (2\pi)^{2n-1} &\rightarrow -B_5, \quad (n \rightarrow \infty) \\ A_{2n}^U (-1)^n (2\pi)^{2n} &\rightarrow -B_4 n, \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (G.2)$$

$$\begin{aligned} B_{2n-1}^V &= 0, \quad (\forall n) \\ B_{2n}^V (-1)^n (2\pi)^{2n} &\rightarrow B_1(2n+2)(2n+1) - B_2 n, \quad (n \rightarrow \infty) \\ B_{2n-1}^U (-1)^{n+1} (2\pi)^{2n-1} &\rightarrow -B_3 n, \quad (n \rightarrow \infty) \\ B_{2n}^U (-1)^n (2\pi)^{2n} &\rightarrow -B_1(2n+2)(2n+1) - B_2 n. \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (G.3)$$

が得られる。ここで、 $B_1 = 0.01480$, $B_2 = 0.14$, $B_3 = 0.186$, $B_4 = 3.503$, $B_5 = 5.551$ である。従って、 $(\tilde{V}_A(p), \tilde{U}_A(p))$ 、 $(\tilde{V}_B(p), \tilde{U}_B(p))$ は、

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_A(p) \\ \tilde{U}_A(p) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 2\pi^3 B_4 f_1^{(R)}(p) \\ 2\pi^3 B_4 f_1^{(R)}(p) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_B(p) \\ \tilde{U}_B(p) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 8\pi^4 B_1 f_2^{(I)}(p) + 2\pi^3 B_2 f_1^{(R)}(p) \\ -8\pi^4 B_1 f_2^{(I)}(p) + 2\pi^3 B_2 f_1^{(R)}(p) \end{pmatrix} + 2\pi^3 i B_3 f_1^{(I)}(p) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

となり、次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} -2\pi i e^{2\pi i z} \text{Res}_{p=2\pi i} \begin{pmatrix} \tilde{V}_A(p) e^{-pz} \\ \tilde{U}_A(p) e^{-pz} \end{pmatrix} &= 2\pi^3 i B_4 z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ -2\pi i e^{2\pi i z} \text{Res}_{p=2\pi i} \begin{pmatrix} \tilde{V}_B(p) e^{-pz} \\ \tilde{U}_B(p) e^{-pz} \end{pmatrix} &= 8\pi^4 B_1 z^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\pi^3 i B_2 z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\pi^3 B_3 z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

付 録 H 1 次の内部方程式の Borel 変換の解析

本節の目的は、 $V_{01}(z)$ と $U_{01}(z)$ の漸近級数を調べることである。 $V_{01}(z)$ 、 $U_{01}(z) - i\frac{k-1}{4}$ の Borel 変換を $\tilde{V}_1(p)$ 、 $\tilde{U}_1(p)$ とすると、これらは次式を満たす。

$$\begin{aligned}(e^{-p} - 1)\tilde{V}_1(p) &= i\frac{k-1}{2}g'(p) + i\frac{k-1}{4}g(p) + \tilde{U}_1(p) * g(p) , \\ (1 - e^p)\tilde{U}_1(p) &= i\frac{k-1}{2}f'(p) + \tilde{V}_1(p) * f(p) .\end{aligned}\tag{H.1}$$

従って、 $\tilde{V}_1(p)$ 、 $\tilde{U}_1(p)$ は、次の級数解を持つ。

$$\tilde{V}_1(p) = -i\frac{kt_1+1}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n p^n , \quad \tilde{U}_1(p) = i\frac{k(t_1+1)}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{d}_n p^n .\tag{H.2}$$

(H.1)、(H.2) より、 $\tilde{V}_1(p)$ 、 $\tilde{U}_1(p)$ は、次の形を持たなければならないことがわかる。

$$\tilde{V}_1(p) = kt_1\tilde{V}_x(p) + (k-1)\tilde{V}_y(p) + \tilde{V}_z(p) , \quad \tilde{U}_1(p) = kt_1\tilde{U}_x(p) + (k-1)\tilde{U}_y(p) + \tilde{U}_z(p) ,\tag{H.3}$$

ここで、 $\tilde{V}_\alpha(p)$ 、 $\tilde{U}_\alpha(p)$ ($\alpha = x, y, z$) は k に依存しない。(H.3) を (H.1) に代入すれば、

$$\begin{aligned}(e^{-p} - 1)\tilde{V}_\alpha(p) &= \tilde{U}_\alpha(p) * g , \\ (1 - e^p)\tilde{U}_\alpha(p) &= \tilde{V}_\alpha(p) * f , \\ &(\alpha = x, z) \\ (e^{-p} - 1)\tilde{V}_y(p) &= \tilde{U}_y(p) * g + \frac{1}{4}g(p) + \frac{1}{2}g'(p) , \\ (1 - e^p)\tilde{U}_y(p) &= \tilde{V}_y(p) * f + \frac{1}{2}f'(p) .\end{aligned}\tag{H.4}$$

が得られ、(H.4) と (G.1) を比較すると、

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1(p) &= i\left(\frac{kt_1+1}{24}\tilde{V}_A(p) + \frac{k-1}{2}\tilde{V}_B(p)\right) , \\ \tilde{U}_1(p) &= i\left(\frac{kt_1+1}{24}\tilde{U}_A(p) + \frac{k-1}{2}\tilde{U}_B(p)\right) ,\end{aligned}\tag{H.5}$$

を得る。これが、本文の (5.66) を与える。

付 録I 複素共役特異点の解析

本論では、解析接続を特異点付近の振る舞いを基に行った。ここでは、 $t = t_1^*$ における接続により付加される項が、 $t = t_1$ から付加される項の複素共役であることを示す。本節では、主要項の接続を用いて証明するが、証明に用いるのは摂動解の実解析性のみであり、高次の項についても全く同じ議論から同じ結果を得る。 (v_{0n}, u_{0n}) の実解析性と (5.28) の展開式より、 (v_{0n}, u_{0n}) は $t = t_1$ と $t = t_1^*$ の近くで次の様に展開できる。

$$\begin{pmatrix} v_{0i}(t) \\ u_{0i}(t) \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_l^{(i)}(t-t_1)^l \\ b_l^{(i)}(t-t_1)^l \end{pmatrix} + \sum_{l=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \overline{a_l^{(i)}}(t-t_1^*)^l \\ \overline{b_l^{(i)}}(t-t_1^*)^l \end{pmatrix}. \quad (i \geq 1, b_0^{(i)} \neq 0)$$

この展開から、次の漸近級数を得る。

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{z^i} \begin{pmatrix} a_0^{(i)} \\ b_0^{(i)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{z}^i} \begin{pmatrix} \overline{a_0^{(i)}} \\ \overline{b_0^{(i)}} \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

ここで、 z, \tilde{z} は、 $\tilde{z} = (t - t_1)/\sigma$ 、 $z = (t - t_1^*)/\sigma$ である。

本節の目標は、第 2 項が第 1 項:

$$\begin{pmatrix} V_{add}(z) \\ U_{add}(z) \end{pmatrix} \equiv - \int_{\gamma} dpe^{-pz} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p^{i-1}}{(i-1)!} \begin{pmatrix} a_0^{(i)} \\ b_0^{(i)} \end{pmatrix}.$$

の複素共役を生み出すことを示すことである。いま、 γ' を p 平面で γ と実軸に関して線対称な経路とする。(I.1) を $\text{Re}\tilde{z} < 0, \text{Im}\tilde{z} > 0$ から $\text{Re}\tilde{z} > 0, \text{Im}\tilde{z} > 0$ に解析接続することによって $t = t_1^*$ 付近で付加される項は、

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma'} dpe^{-p\tilde{z}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p^{i-1}}{(i-1)!} \begin{pmatrix} \overline{a_0^{(i)}} \\ \overline{b_0^{(i)}} \end{pmatrix} &= - \int_{\gamma} d\bar{p}e^{-\bar{p}\tilde{z}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{p}^{i-1}}{(i-1)!} \begin{pmatrix} \overline{a_0^{(i)}} \\ \overline{b_0^{(i)}} \end{pmatrix} \\ &= - \int_{\gamma} dpe^{-p\tilde{z}^*} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p^{i-1}}{(i-1)!} \begin{pmatrix} a_0^{(i)} \\ b_0^{(i)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{V_{add}(\tilde{z}^*)} \\ \overline{U_{add}(\tilde{z}^*)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

である。従って、 $x_{add}(t, \sigma)$ が $t = t_1$ 近傍で (I.2) とマッチングされたとすると、第 2 項は $x_{add}(\bar{t}, \sigma)$ とマッチングされる。 $t \in \mathbb{R}$ のとき、これは $x_{add}(t, \sigma)$ の複素共役である。

参考文献

- [1] A. Kossakowski, “On quantum statistical mechanics of non-hamiltonian systems,” *Rep. Math. Phys.*, vol. 3, p. 247, 1972.
- [2] A. Kossakowski and Bull *Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Astr. Phys.*, vol. 21, p. 1021, 1972.
- [3] R. S. Ingarden and A. Kossakowski *Ann. Phys.*, vol. 89, p. 451, 1975.
- [4] K. Yosida, *Functional Analysis*. Springer, Berlin, 1972.
- [5] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1994.
- [6] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [7] G. Lindblad *Commun. Math. Phys.*, vol. 48, p. 119, 1976.
- [8] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan *J. Math. Phys.*, vol. 17, p. 821, 1976.
- [9] K. Kraus *Ann. Phys.*, vol. 64, p. 311, 1971.
- [10] K. Kraus, *States, Effects, and Operations*. Springer, 1983.
- [11] T. Prosen *New J. Phys.*, vol. 10, p. 043026, 2008.
- [12] T. Prosen and I. Pižorn, “Quantum phase transition in a far-from-equilibrium steady state of an XY spin chain,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 105701, 2008.
- [13] T. Oka, R. Arita, and H. Aoki, “Breakdown of a mott insulator: A nonadiabatic tunneling mechanism,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 066406, 2003.
- [14] G. Benenti, G. Casati, T. Prosen, and D. Rossini, “Negative differential conductivity in far-from-equilibrium quantum spin chains,” *Europhys. Lett.*, vol. 85, p. 37001, 2009.
- [15] G. Benenti, G. Casati, T. Prosen, D. Rossini, and M. Žnidarič, “Charge and spin transport in strongly correlated one-dimensional quantum systems driven far from equilibrium,” *Phys. Rev. B*, vol. 80, p. 035110, 2009.

- [16] S. Sasa and H. Tasaki, “Steady state thermodynamics,” *J. Stat. Phys.*, vol. 125, p. 125, 2006.
- [17] D. Zubarev, *Nonequilibrium Statistical Thermodynamics*. Springer-Verlag, 1995.
- [18] 金 賢得、早川 尚男, “温度勾配のある希薄媒体系の非平衡統計力学 (複媒流体の数理解析),” *数理解析研究所講義録*, vol. 73, p. 1305, 2003.
- [19] I. E. Segal, “Postulates for general quantum mechanics,” *The Annals of Mathematics Second ser.*, vol. 48, No. 4, p. 930, 1947.
- [20] O. Bratteli and D. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics vol.1, vol.2*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2002.
- [21] D. Ruelle *J. Stat. Phys.*, vol. 98, p. 57, 2000.
- [22] D. Ruelle *Comm. Math. Phys.*, vol. 224, p. 3, 2001.
- [23] R. Haag, *Local Quantum Physics*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1996.
- [24] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, *Open Quantum Systems I, II, III (Lecture Notes in Mathematics, 1880, 1881, 1882)*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2006.
- [25] W. Pusz and S. L. Woronowicz *Commun. Math. Phys.*, vol. 58, p. 273, 1978.
- [26] I. Ojima, H. Hasegawa, and M. Ichiyanagi, “Entropy production and its positivity in nonlinear response theory of quantum dynamical systems,” *J. Stat. Phys.*, vol. 50, p. 633, 1988.
- [27] I. Ojima, “Entropy production and nonequilibrium stationarity in quantum dynamical systems. physical meaning of van hove limit,” *J. Stat. Phys.*, vol. 56, p. 203, 1989.
- [28] I. Ojima, *Quantum Aspects of Optical Communications, Lecture Note in Phys.* **56**. Springer, 1991.
- [29] V. Jakšić and C.-A. Pillet *Commun. Math. Phys.*, vol. 217, p. 285, 2001.
- [30] V. Jakšić and C.-A. Pillet *Commun. Math. Phys.*, vol. 226, p. 131, 2002.
- [31] V. Jakšić and C.-A. Pillet *J. Stat. Phys.*, vol. 108, p. 787, 2002.
- [32] J. Fröhlich, M. Merkli, S. Schwarz, and D. Ueltschi, *A garden of quanta*, p. 345. World Scientific, River Edge, 2003.
- [33] S. Tasaki and T. Matsui, *Fundamental Aspects of Quantum Physics*, p. 100. World Scientific, Singapore, 2003.
- [34] S. Tasaki and J. Takahashi *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. 165, p. 57, 2006.

- [35] S. Tasaki, “Thermodynamics of a class of large quantum systems,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 31, p. 35, 2006.
- [36] S. Tasaki and T. Matsui *RIMS Kohkyuroku*, vol. 1507, p. 118, 2006.
- [37] T. Ho and H. Araki *Proc. Steklov Math. Institute*, vol. 228, p. 191, 2000.
- [38] W. H. Aschbacher and C.-A. Pillet, “Non-equilibrium steady states of the XY chain,” *J. Stat. Phys.*, vol. 112, p. 1153, 2003.
- [39] J. Takahashi and S. Tasaki, “Nonequilibrium steady states and Fano-Kondo resonances in an AB ring with a quantum dot,” *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol. 75, No.9, p. 094712, 2006.
- [40] H. Katsura, “Nonequilibrium Kondo problem with spin-dependent chemical potentials: Exact results,” *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol. 76, p. 054710, 2007.
- [41] W. Aschbacher, V. Jakšić, Y. Pautrat, and C. A. Pillet *J. Math. Phys.*, vol. 48, p. 032101, 2007.
- [42] G. Nenciu *J. Math. Phys.*, vol. 48, p. 033302, 2007.
- [43] J. Fröhlich, M. Merkli, and D. Ueltschi *Ann. Henri. Poincaré*, vol. 4, p. 897, 2006.
- [44] S. Tasaki *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 12, p. 2657, 2001.
- [45] J. Takahashi and S. Tasaki *J. Phys. Soc. Jpn. Suppl.*, vol. 74, p. 261, 2005.
- [46] J. Takahashi and S. Tasaki, “Nonequilibrium current fluctuation in an AB ring with a quantum dot,” *Physica E*, vol. 34, p. 651, 2006.
- [47] Y. M. Blanter and M. Büttiker *Phys. Rep.*, vol. 336, p. 1, 2000.
- [48] H. Shirakawa, E. J. Louis, A. G. MacDiarmid, C. K. Chiang, and A. J. Heeger, “Synthesis of electrically conducting organic polymers: halogen derivatives of polyacetylene $(CH)_x$,” *J. Chem. Soc., Chem. Commun.*, p. 578, 1977.
- [49] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger *Phys. Rev. Lett.*, vol. 42, p. 1698, 1979.
- [50] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger *Phys. Rev. B*, vol. 22, p. 2099, 1980.
- [51] W. P. Su and J. R. Schrieffer, “Soliton dynamics in polyacetylene,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 77 No. 10, p. 5626, 1980.
- [52] A. J. Heeger, S. Kivelson, J. R. Schrieffer, and W. P. Su, “Solitons in conducting polymers,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 60, p. 781, 1988.
- [53] H. Takayama, Y. R. Lin-Liu, and K. Maki, “Continuum model for solitons in polyacetylene,” *Phys. Rev. B*, vol. 21, p. 2388, 1980.

- [54] S. Brazovskii and N. Kirova *ZhETF Pisma*, vol. 33, p. 6, 1981.
- [55] D. K. Campbell and A. R. Bishop *Phys. Rev. B*, vol. 24, p. 4859, 1981.
- [56] R. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu *Phys. Rev. D*, vol. 12, p. 2443, 1975.
- [57] S. A. Brazovskii, “Self-localized excitations in the Peierls-Frohlich states,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 51(2), p. 342, 1980.
- [58] Campbell and Bishop, “Soliton excitations in polyacetylene and relativistic field theory models,” *Nuclear Physics B*, vol. 200, p. 297, 1982.
- [59] L. Mondaini, E. C. Marino, and A. A. Schmidt *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 42, p. 055401, 2009.
- [60] B. Horovitz and E. Pazy *Europhys. Lett.*, vol. 65 (3), p. 386, 2004.
- [61] A. A. Johansson and S. Stafström *Phys. Rev. B*, vol. 69, p. 235205, 2004.
- [62] X. Liu, K. Gao, J. Fu, Y. Li, J. Wei, and S. Xie, “Effect of the electric field mode on the dynamic process of a polaron,” *Phys. Rev. B*, vol. 74, p. 172301, 2006.
- [63] B. Di, Z. An, Y. C. Li, and C. Q. Wu *EPL*, vol. 79, p. 17002, 2007.
- [64] A. A. Johansson and S. Stafström *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, p. 3602, 2001.
- [65] A. A. Johansson and S. Stafström *Phys. Rev. B*, vol. 65, p. 045207, 2002.
- [66] R. S. V and C. E. M *Appl. Phys. Lett.*, vol. 75, p. 1518, 1999.
- [67] S. Ajisaka, S. Tasaki, and I. Terasaki, “Static soliton at nonequilibrium steady state.” [airXiv:0906.5337](#).
- [68] S. Ajisaka, S. Tasaki, and I. Terasaki, “Polaron formation as a genuine nonequilibrium phenomenon.” [airXiv:0907.0218](#).
- [69] K. Inagaki, I. Terasaki, H. Mori, and T. Mori, “Large dielectric constant and giant nonlinear conduction in the organic conductor,” *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol. 73, p. 3364, 2004.
- [70] F. Sawano, I. Terasaki, H. Mori, T. Mori, M. Watanabe, N. Ikeda, Y. Nogami, and Y. Noda *Nature*, vol. 437, p. 522, 2005.
- [71] M. Watanabe, K. Yamamoto, Y. N. T. Ito, M. Tanabe, N. Hanasaki, N. Ikeda, Y. Nogami, H. Ohsumi, H. Toyokawa, Y. Noda, I. Terasaki, F. Sawano, H. M. T. Suko, and T. Mori, “Non-thermal evidence for current-induced melting of charge order in θ -(BEDT-TTF)₂CsZn(SCN)₄,” *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol. 77, p. 065004, 2008.

- [72] F. Sawano, T. Suko, T. Inada, S. Tasaki, I. Terasaki, H. Mori, T. Mori, Y. Nogami, N. Ikeda, M. Watanabe, and Y. Noda, “Current-density dependence of the charge-ordering gap in the organic salt θ -(BEDT-TTF)₂CsM(SCN)₄ (M=Zn, Co, Co_{0.7}Zn_{0.3}),” *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol. 78, p. 024714, 2009.
- [73] C. S. Owen and D. J. Scalapino, “Superconducting state under the influence of external dynamic pair breaking,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28, p. 1559, 1972.
- [74] J.-J. Chang and D. J. Scalapino, “New instability in superconductors under external dynamic pair breaking,” *Phys. Rev. B*, vol. 10, p. 4047, 1974.
- [75] G. Grüner, *Density Waves in Solids*. Addison-Wesley Longmans, Reading, 1994.
- [76] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, 1996.
- [77] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*. Wiley, 1989.
- [78] H. Poincaré, “Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamiques,” *Acta. Math*, vol. 13, p. 1, 1890.
- [79] H. Poincaré, *Les Methods Nouvelles de la mecanique Celeste*. Gauthier-Villars Paris, 1892.
- [80] A. N. Kolmogorov, “On the preservation of quasi-periodic motions under a small variation of hamilton’s function,” *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 98, p. 525, 1954.
- [81] J. Moser, “On invariant curves of area-preserving mappings on an annulus,” *Nachr. Akad. Wiss. Goettingen Math. Phys.*, vol. K1, p. 1, 19.
- [82] V. I. Arnold, “Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics,” *Russian Math. Surveys*, vol. 18, p. 85, 1963.
- [83] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer-Verlag, 1992.
- [84] S. Smale, “Differential dynamical systems,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 73, p. 747, 1967.
- [85] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, waves, and Turbulence*. Dover, 2003.
- [86] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index (CBMS Regional Conference Series in Mathematics vol. 38)*. American Mathematical Society: Providence, 1978.
- [87] Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 2002.

- [88] J. Milnor, "On the concept of attractor," *Comm. Math. Phys.*, vol. 99, p. 177, 1985.
- [89] D. Ruelle, "Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors," *Comm. Math. Phys.*, vol. 82, p. 137, 1981.
- [90] N. N. Nekhoroshev, "An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable hamiltonian systems," *Russ. Math. Survey*, vol. 32, p. 1, 1977.
- [91] J. Palis and W. deMelo, *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer-Verlag, 1982.
- [92] A. J. Shchwarz, "A generalization of a Poincaré Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds," *Amer. J. Math.*, vol. 85, p. 453, 1963.
- [93] S. Wiggins, *Introduction to applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, 1997.
- [94] J. Moser, *Stable and random Motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press, 1974.
- [95] S. R. Channon and J. L. Lebowitz, "Numerical experiments in stochasticity and homoclinic oscillation," *Ann. New York Acad. Sci.*, vol. 357, p. 108, 1980.
- [96] J. H. Bartlett, "Limits of stability for an area-preserving polynomial mapping," *Celestial Mech.*, vol. 28, p. 295, 1982.
- [97] R. S. Mackay, J. D. Meiss, and I. C. Percival, "Transport in hamiltonian systemes," *Physica D*, vol. 13, p. 55, 1984.
- [98] Rom-Kedar and S. Wiggins, "Transport in two-dimensional maps," *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 109, No. 3, p. 239, 1990.
- [99] H. Poincaré, *New methods of celestial mechanics, vols. 1–3 (Revised reprint of the 1967 English translation)*. American Institute of Physics, New York, 1993.
- [100] V. F. Lazutkin, *Theory and semiclassical approximations to eigenfunctions*. Springer Verlag, Berlin, 1993.
- [101] V. F. Lazutkin, "Splitting of complex separatrices," *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 22:2, p. 83, 1988.
- [102] V. F. Lazutkin, "Splitting of complex separatrices," *Funct. Anal. Appl.*, vol. 22, p. 154, 1988.
- [103] S. Ushiki, "Sur les liaisons-cols des systemes dynamiques analytiques," *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A*, vol. 291, p. 447, 1980.

- [104] V. G. Gelfreich and V. F. Lazutkin, “Splitting of separatrices: perturbation theory and exponential smallness,” *Russ. Math. Surv.*, vol. 56, No. 3, p. 499, 2001.
- [105] Y. B. Suris, “On integrable mappings of standard type,” *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 23:1, p. 84, 1989.
- [106] Y. B. Suris, “On integrable mappings of standard type,” *Funct. Anal. Appl.*, vol. 23, p. 74, 1989.
- [107] E. M. McMillan, *Topics in Modern Physics*, ch. A problem in the stability of periodic systems, p. 219. Colorado Association University Press, Boulder, 1971.
- [108] E. Fontich and C. Simó, “The splitting of separatrices for analytic diffeomorphisms,” *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, vol. 10, p. 295, 1990.
- [109] V. F. Lazutkin, “Splitting of separatrices for the chirikov standard map,” *VINITI*, p. 6372, 1984.
- [110] V. F. Lazutkin, “Splitting of separatrices for the standard and esmistandard mappings,” *VINITI*, p. 4027, 1985.
- [111] V. F. Lazutkin, “Splitting of separatrices for the chirikov standard map,” *J. Math. Sciences*, vol. 128, p. 2687, 2005.
- [112] V. F. Lazutkin, I. G. Shakhmanski, and M. B. Tabanov, “Splitting of separatrices for standard and semistandard mappings,” *Physica D*, vol. 40, No. 2, p. 235, 1989.
- [113] V. G. Gelfreich, V. F. Lazutkin, and M. B. Tabanov, “Exponentially small splitting in hamiltonian systems,” *Chaos*, vol. 1, No. 2, p. 137, 1993.
- [114] V. G. Gelfreich, V. F. Lazutkin, and N. V. Svanidze, “A refined formula for the separatrix splitting for the standard map,” *Physica D*, vol. 71, p. 82, 1994.
- [115] V. G. Gelfreich, “A proof of the exponentially small transversality of the separatrices for the standard map,” *Comm. Math. Phys.*, vol. 201, p. 155, 1999.
- [116] V. G. Gelfreich, “Separatrices splitting for polynomial area-preserving maps,” in *M. Sh. Birman (ed.), Topics in Math. Phys.*, vol. 13, p. 108, 1991.
- [117] D. V. Treshchev, “An averaging method for hamiltonian systems, exponentially close to integrable ones,” *Chaos*, vol. 6, p. 6, 1996.
- [118] V. Gelfreich and C. Simo, “High-precision computation of divergent asymptotic series and homoclinic phenomena,” *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, vol. 10, No. 2, p. 511, 2008.
- [119] V. F. Lazutkin, “On the width of instability zone near the separatrices of a standard mapping,” *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 313, p. 268, 1991.

- [120] P. Holmes, J. Marsden, and J. Scheurle, “Exponentially small splittings of separatrices with applications to kam theory and degenerate bifurcations,” *Contemp. Math.*, vol. 81, p. 213, 1988.
- [121] V. Hakim and K. Mallick, “Exponentially small splittings of separatrices, matching in the complex plane and borel summation,” *Nonlinearity*, vol. 6, p. 57, 1993.
- [122] Y. B. Suris, “On the complex separatrices of some standard-like maps,” *Nonlinearity*, vol. 7, No. 4, p. 1225, 1994.
- [123] A. Tovbis, “Asymptotics beyond all orders and analytic properties of inverse Laplace transforms of solution,” *Comm. Math. Phys.*, vol. 163, p. 245, 1994.
- [124] A. Tovbis, M. Tsuchiya, and C. Jaffé, “Exponential asymptotic expansions and approximations of the unstable and stable manifolds of singularly perturbed systems with the Hénon map as an example,” *Chaos*, vol. 8, p. 665, 1994.
- [125] J. Écalle, *Les fonctions resurgentes, vol. 2*. Math. d’Orsay, Paris, 1981.
- [126] V. G. Gelfreich and D. Sauzin, “Borel summation and splitting of separatrices for the Hénon map,” *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 51, No. 2, p. 513, 2001.
- [127] A. Delshams, V. Gelfreich, A. Jorba, and T. M. Seara, “Exponentially small splitting of separatrices under fast quasi-periodic forcing,” *Comm. Math. Phys.*, vol. 189, p. 35, 1997.
- [128] D. V. Treshchev, “Separatrix splitting from the point of view of symplectic geometry,” *Mat. Zametki*, vol. 61, p. 890, 1997.
- [129] G. Gallavotti, G. Gentile, and V. Mastropietro, “Separatrix splitting for systems with three time scales,” *Comm. Math. Phys.*, vol. 202, p. 197, 1999.
- [130] D. V. Treshchev, “Separatrix splitting from the point of view of symplectic geometry,” *Math. Notes*, vol. 61, p. 744, 1997.
- [131] G. Gallavotti, G. Gentile, and V. Mastropietro, “On homoclinic splitting problems,” *Physica D*, vol. 137, p. 202, 2000.
- [132] G. M. Zaslavskii, M. Y. Zakharov, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, and A. A. Chernikov, “Stochastic web and diffusion of particles in a magnetic field,” *Zh. Eksper. Teoret. Fiz.*, vol. 91, p. 500, 1986.
- [133] G. M. Zaslavskii, M. Y. Zakharov, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, and A. A. Chernikov, “Stochastic web and diffusion of particles in a magnetic field,” *Soviet Phys. JETP*, vol. 64, p. 294, 1987.

- [134] C. Amick, E. S. C. Ching, L. P. Kadanoff, and V. Rom-Kedar, “Beyond all orders: singular perturbations in a mapping,” *J. Nonlinear Sci.*, vol. 2, p. 9, 1992.
- [135] E. Lombardi, “Oscillatory integrals and phenomena beyond all algebraic orders with applications to homoclinic orbits in reversible systems,” *Preprint, Institut Non Linéaire de Nice*, vol. 99, p. 31, 1999.
- [136] J. E. Howard and S. M. Hols, “Stochasticity and reconnection in hamiltonian systems,” *Phys. Rev. A*, vol. 29, p. 418, 1984.
- [137] S. Shinohara. PhD thesis, Waseda univ., 1999.
- [138] S. Shinohara *Phys. Lett. A*, vol. 298, p. 300, 2002.
- [139] V. I. Arnold, “Instability of dynamical systems with several degrees of freedom,” *Soviet Math. Dokl.*, vol. 5, p. 581, 1964.
- [140] C. Karney *Phys. Fluids*, vol. 22, p. 2188, 1979.
- [141] G. Zaslavsky *Chaos*, vol. 1, p. 1, 1991.
- [142] I. Dana *Phys. Lett. A*, vol. 197, p. 413, 1995.
- [143] P. Leboeuf, J. Kurchan, and D. P. A. M. Feingold, “Phase-space localization: Topological aspects of quantum chaos,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 65, p. 3076, 1990.
- [144] P. Leboeuf, J. Kurchan, and M. Feingold, “Topological aspects of quantum chaos,” *Chaos*, vol. 2, p. 125, 1992.
- [145] G. Zaslavsky, R. Sagdeev, and A. Chernikov *Sov. Phys. JETP*, vol. 67, p. 270, 1998.
- [146] R.A.Pasmanter *Phys. Rev. A*, vol. 42, p. 3622, 1990.
- [147] P. Leboeuf, “Normal and anomalous diffusion in a deterministic area-preserving map,” *Physica D*, vol. 116, p. 8, 1998.
- [148] V. Chernov, “On separatrix splitting of some quadratic area-preserving maps of the plane,” *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 3, No. 1, p. 49, 1998.
- [149] C. Simó and E. Fontich, *Singularités, Feuilletages et Mécanique Hamiltonienne*, ch. On the smallness of the angle between split separatrices, p. 41. M. Hermann, 1985.
- [150] K.Nakamura and H.Kushibe, “Beyond-all-orders asymptotics and heteroclinic structures,” *Prog. Theor. Phys. Supplement*, vol. 139, p. 178, 2000.
- [151] “V. G. gelfreich; private communication.”.
- [152] S. Ajisaka and S. Tasaki, “Method of asymptotics beyond all orders and restriction on maps,” *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, vol. 9 No.2, p. 173, 2006.

謝辞

指導教官である田崎秀一教授には学部生の頃よりご指導を頂き、多くの有益な議論や適切なアドバイスをして頂き、研究者としての姿勢をご教授して頂きました。深く感謝致します。寺崎一郎教授との共同研究は量子開放系の理解を深める上で重要なものでした。これを感謝致します。Vassili Gelfreich 教授は Warwick 大学にて、ABAO 法について基礎的なところから指導していただきました。これを感謝致します。また、相澤洋二教授、秋元琢磨博士、木村元博士、栗原進教授、後藤振一郎博士、齊藤圭司博士、佐藤高彰博士、首藤啓教授、中村勝弘教授、藤坂博一教授、松永康博士、松本崇博士、宮口智成博士、山口義幸博士、山崎義弘教授、David Sauzin 教授、Giuliano Benenti 教授、Giulio Casati 教授、Marko Robnik 教授、Tomaž Prosen 教授との有益な議論に感謝致します。また、藤吉正人氏、中山智史氏、西村尚志氏、由井紀光氏、門内隆明博士ならびに田崎研究室の方々には日頃から議論や相談に応じて頂きました。そして、家族には研究生生活を支えて頂きました。上記の方々に謹んで感謝の意を表し、厚く御礼申し上げます。

研究業績

1. 論文

- (1) S. Ajisaka, H. Nishimura, I. Terasaki, and S. Tasaki,
“Nonequilibrium Peierls Transition”,
Progress of theoretical physics, **121**, No. 6, 1289 – 1319 (2009), 31pages
- (2) S. Ajisaka and S. Tasaki,
“Reconnection of Unstable/Stable manifolds of the Harper map”,
Progress of theoretical physics, **116**, No. 4, 631 – 668 (2006), 38pages
- (3) I. Terasaki, S. Tasaki, S. Ajisaka, Y. Nogami, N. Hanasaki, M. Watanabe, H. Mori, and T. Mori,
“Nonequilibrium Charge Ordering in θ -(BEDT-TTF) $_2$ MM' (SCN) $_4$ (M =Rb, Cs; M' =Co, Zn)”,
to appear in Physica B
- (4) S. Ajisaka and S. Tasaki,
“Method of Asymptotics beyond all orders and Restriction on Maps”,
Nonlinear phenomena in complex systems, **9**, No. 2, 173 – 177 (2006), 5page
- (5) S. Ajisaka and S. Tasaki,
“Analytical study for reconnection of stable/unstable manifolds of the Harper map”,
Journal of physics: conference series, **31**, 227 – 228 (2006), 2pages

2. 国際会議

- (1) S. Ajisaka, I. Terasaki, and S. Tasaki (talk)
“Nonequilibrium Peierls transition”, Let's face Chaos through nonlinear dynamics, Maribor Univ., Slovenia, 2008 6.29 – 7.13
- (2) S. Ajisaka, I. Terasaki, and S. Tasaki (poster)
“Nonequilibrium Peierls transition”, The 5th 21st century COE symposium on Physics of Self-organization Systems Toward Next Generation Physics, Waseda Univ., Japan, 2007 9.13 – 9.14
- (3) S. Ajisaka, I. Terasaki, and S. Tasaki (talk)
“Soliton excitations in nonequilibrium Peierls transition”, 8th JAPAN-SLOVENIA SEMINAR ON NONLINEAR SCIENCE, Maribor Univ., Slovenia, 2007 7.2 – 7.6
- (4) S. Ajisaka and S. Tasaki (poster)
“Method of Asymptotics beyond all orders and Restriction on Maps”, International conference on Quantum Mechanics and Chaos, Osaka city univ., Japan, 2006.9.19 – 9.21

- (5) S. Ajisaka and S. Tasaki (poster)
 “Method of Asymptotics beyond all orders and Restriction on Maps”, Dynamics Days Asia Pacific 4, Pohang univ. Korea, 2006.7.12 – 7.14
- (6) S. Ajisaka, I. Terasaki, and S. Tasaki (poster)
 “Nonequilibrium Peierls transition”, The 4th 21st century COE symposium on Physics of Self-organization Systems Self-organization Phenomena in Condensed Matter, Waseda univ., Japan, 2006.9.6 – 9.8
- (7) S. Ajisaka and S. Tasaki (poster)
 “Method of Asymptotics beyond all orders and Restriction on Maps”, Algebraic, Analytic and Geometric Aspects of Complex Differential Equations and their Deformations. Painleve Hierarchies, Research Institute for Mathematical Sciences (Kyoto), Japan, 2006.5.15 – 5.20
- (8) S. Ajisaka and S. Tasaki (poster)
 “Analysis of the reconnection of stable/unstable manifold of the Harper map”, The 3rd 21st century COE symposium on Physics of Self-organization Systems Astrophysics as interdisciplinary science, Waseda univ., Japan, 2005.9.1 – 9.3
- (9) S. Ajisaka and S. Tasaki (poster)
 “Reconnection of Unstable/Stable manifolds of the Harper map”, International symposium of complexified dynamics, Tunneling and Chaos, Ritsumeikan univ., Japan, 2005.8.28 – 9.1
- (10) S. Ajisaka and S. Tasaki (poster)
 “Reconnection of Unstable/Stable manifolds of the Harper map”, Let’s face Chaos through nonlinear dynamics, Maribor univ., Slovenia, 2005.6.25 – 7.10
- (11) S. Ajisaka and S. Tasaki (poster)
 “Analysis of the mechanism of reconnection of the Harper mapping with the aids of asymptotics beyond all orders”, The 2nd 21st century COE symposium on Physics of Self-organization Systems, Waseda univ., Japan, 2004.12.18 – 12.19
- (12) S. Ajisaka and S. Tasaki (poster)
 “Analysis of the splitting of separatrices of the Harper mapping with the aids of asymptotics beyond all orders”, Workshop on Chaos and Nonlinear Dynamics in Quantum-Mechanical and Macroscopic systems, Yukawa Institute, Japan, 2004.12.8

3. 国内会議、学会

- (1) S. Ajisaka, I. Terasaki, and S. Tasaki (talk)
 “Nonequilibrium Peierls Transition 2”, Workshop on classical/quantum dynamics and nonequilibrium statistical mechanics, Yayoi Auditorium Annex, Japan, 2010.2.12 – 2.14

- (2) S. Ajisaka, I. Terasaki, and S. Tasaki (talk)
“Polaron formation as a genuine nonequilibrium phenomenon”, Meeting of Physical Society of Japan, Kumamoto univ., Japan, 2009.9.25
- (3) S. Ajisaka, I. Terasaki, and S. Tasaki (talk)
“Nonequilibrium Peierls Transition”, Workshop on classical/quantum dynamics and nonequilibrium statistical mechanics, Gakushi-kaikan, Japan, 2009.3.1 – 3.3
- (4) S. Ajisaka, I. Terasaki, and S. Tasaki (talk)
“Nonequilibrium Peierls Transition (1/4 filled)”, Meeting of Physical Society of Japan, Rikkyo univ., Japan, 2009.3.30
- (5) S. Ajisaka, I. Terasaki, and S. Tasaki (talk)
“Static Soliton in Peierls System at Nonequilibrium Steady State”, Meeting of Physical Society of Japan, Hokkaido univ., Japan, 2007.9.24
- (6) S. Ajisaka and S. Tasaki (talk)
“Construction of family of maps for which the method of asymptotics beyond all all orders is applied”, Meeting of Physical Society of Japan, Chiba univ., Japan, 2006.9.25
- (7) S. Ajisaka, I. Terasaki, and S. Tasaki (talk)
“Nonequilibrium Peierls Transition”, Meeting of Physical Society of Japan, Chiba univ., Japan, 2006.9.25
- (8) S. Ajisaka and S. Tasaki (talk)
“Divergence of Stokes constant of the Harper map, and a method to prevent it”, Meeting of Physical Society of Japan, Ehime univ., Japan, 2006.3.29
- (9) S. Ajisaka and S. Tasaki (talk)
“Analysis of the reconnection of the Harper map with the aids of asymptotics beyond all orders”, Meeting of Physical Society of Japan, Doshisha univ., Japan, 2005.9.22
- (10) S. Ajisaka and S. Tasaki (talk)
“Analysis of the Harper map with the aids of asymptotics beyond all orders”, Meeting of Physical Society of Japan, Aomori univ., Japan, 2004.9.13